

Analysis I

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2

Aufgabe 1: (12 Punkte)

a) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

b) Es seien a und p gegebene feste positive Zahlen, $p \neq 1$ und

$$K_1 = a, \quad K_{n+1} := p \cdot K_n + a, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass folgende Formel gilt:

$$K_n = a \cdot \frac{1-p^n}{1-p}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 2: (10 Punkte) Eine Person legt am Anfang jedes Jahres a Euro auf einem Sparkonto an. Er hat sich auf jährliche Verzinsung eingelassen und erhält jeweils am Ende des Jahres zwei Prozent Zinsen. Am Anfang des ersten Jahres hat er also $K_1 = a$ Euro und am Anfang des zweiten Jahres (nach der Einzahlung) $K_2 = a(1+0.02) + a$ Euro auf seinem Sparkonto.

a) Welches Guthaben weist das Sparkonto am Anfang des dritten bzw. vierten Jahres nach der jeweiligen Einzahlung auf?

Tipp: Multiplizieren Sie die Potenzen von 1.02 nicht aus, sondern lassen Sie diese als 1.02^k stehen.

b) Es sei $a = 500$. Geben Sie eine Formel für das Guthaben am Anfang des n -ten Jahres (nach der Einzahlung) an, die nur a als Variable enthält, nicht aber K_{n-1} .?

Tipp: Benutzen Sie Aufgabe 1b) oder die Formel $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \quad \forall q \neq 1$ aus der Vorlesung.

c) Berechnen Sie K_n für $a = 500$ und $n = 20$ (Taschenrechner oder Ähnliches).

Aufgabe 3: (7 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und M_n eine Menge mit n Elementen. Also zum Beispiel $M_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Zeigen Sie, dass es $n!$ Permutationen der Elemente von M_n gibt.

Aufgabe 4: (11 Punkte)

- a) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass jede natürliche Zahl $n \geq 2$ eine **Primfaktorzerlegung**

$$n = p_1^{r_1} \cdots p_m^{r_m}, \quad r_1, \dots, r_m \in \mathbb{N}, \quad p_1, \dots, p_m \text{ Primzahlen}$$

besitzt.

- b) Zeigen Sie mit Hilfe von Teil a), dass die Gleichung $x^2 - 3 = 0$ keine rationale Lösung hat.

Abgabe: während der Übungen vom 02.11 bis 06.11