

4.3 Konvergenzkriterien für Reihen

Definition: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $a_n \in \mathbb{R}$ (oder $a_n \in \mathbb{C}$), eine reelle (komplexe) Folge. Dann heißt die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, definiert durch

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0,$$

eine **Reihe** in \mathbb{R} (bzw. in \mathbb{C}). Die Folgenglieder s_n der Reihe (s_n) werden als **Partialsummen** bezeichnet. Falls die Folge (s_n) der Partialsummen konvergiert, d.h. die Reihe konvergiert, mit einem Grenzwert s , d.h. $s_n \rightarrow s$ ($n \rightarrow \infty$), so schreibt man

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$$

für den **Grenzwert** der Reihe $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. □

Einige Konvergenzkriterien für Reihen.

Satz (Unmittelbare Konvergenzkriterien für Reihen):

(a) Es gilt das **Cauchysche Konvergenzkriterium**

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N : m, n \geq N : \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \varepsilon$$

(b) Es gilt die notwendige Bedingung

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \implies \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$$

Beweis:

- Teil (a) folgt unmittelbar aus dem Cauchy-Kriterium für Folgen.
- Teil (b) folgt aus Teil (a) für den Spezialfall $m = n$. ■

Satz (Weitere unmittelbare Konvergenzkriterien für Reihen):

(c) Seien $\sum a_k$, $\sum b_k$ konvergente Reihen. Dann konvergieren die Reihen $\sum (a_k + b_k)$ und $\sum (\lambda a_k)$, und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

(d) Es gilt das **Leibnizsche Konvergenzkriterium**: Eine **alternierende Reihe** der Form $\sum (-1)^k a_k$, $a_k \geq 0$, deren (nicht-negativen) Folgenglieder a_k eine monoton fallende Nullfolge bilden, konvergiert, und es gilt

$$\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \leq \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k$$

Beweis: Teil (c) folgt direkt aus der Linearität der Grenzwertbildung für Folgen.

Zu Teil (d): Für die Reihen

$$u_n := \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k a_k \quad \text{und} \quad v_n := \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k$$

gilt

$$u_{n+1} = u_n + (a_{2n} - a_{2n+1}) \geq u_n$$

$$v_{n+1} = v_n - (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \leq v_n$$

$$v_n = u_n + a_{2n} \geq u_n$$

$$v_n - u_n = a_{2n} \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Somit bilden die Folgen (u_n) , (v_n) eine Intervallschachtelung, konvergieren gegen einen gemeinsamen Grenzwert, und es gilt

$$u_n \leq \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \leq v_n. \quad \blacksquare$$

Die geometrische Reihe.

Beispiel: Für $x, y \in \mathbb{C}$ gilt

$$x^m - y^m = (x - y) \sum_{j=1}^m x^{m-j} y^{j-1}.$$

Insbesondere mit $m = n + 1$, $x = 1$ und $y = q \in \mathbb{C}$ gilt

$$s_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

für die Partialsummen der **geometrischen Reihe** $\sum q^k$. Daraus folgt, dass

- die geometrische Reihe für $|q| < 1$ konvergiert mit Grenzwert

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}$$

- die geometrische Reihe für $|q| > 1$ divergiert. ■

Die harmonische Reihe.

Beispiel: Die **harmonische Reihe**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

divergiert, denn es gilt

$$\sum_{k=n}^m \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n}^m \frac{1}{m} = \frac{1}{m} \sum_{k=n}^m 1 = \frac{m-n+1}{m} \longrightarrow 1 \quad (m \rightarrow \infty)$$

und somit ist das Cauchy-Kriterium

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N: m, n \geq N: \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \varepsilon$$

für $\varepsilon < 1$ verletzt. ■

Die alternierende harmonische Reihe.

Beispiel: Die **alternierende harmonische Reihe**

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

konvergiert nach dem Leibnizschen Konvergenzkriterium, und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} = \ln(2) = 0.69314 \dots$$

für den Grenzwert der alternierenden harmonischen Reihe. □

Absolute Konvergenz von Reihen.

Definition: Eine Reihe $\sum a_k$ heißt **absolut konvergent**, falls die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

konvergiert. □

Beispiel: Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

ist konvergent, aber **nicht** absolut konvergent, denn es gilt $a_k = (-1)^k \frac{1}{k+1}$ und

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| (-1)^k \frac{1}{k+1} \right| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

ist die harmonische Reihe, die **nicht** konvergiert. □

Kriterien für absolute Konvergenz von Reihen.

Satz: Sei $\sum_k a_k$ eine Reihe. Dann gelten die folgenden Konvergenzkriterien.

$$(a) \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent} \iff \left(\sum_{k=0}^n |a_k| \right)_{n \geq 0} \text{ beschränkt;}$$

(b) **Majorantenkriterium:**

$$|a_k| \leq b_k \wedge \sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \implies \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent;}$$

(c) **Quotientenkriterium:** Sei $a_k \neq 0$ ($\forall k \geq k_0$).

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q < 1 \quad (\forall k \geq k_0) \implies \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent;}$$

(d) **Wurzelkriterium:**

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1 \quad (\forall k \geq k_0) \implies \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent.}$$

Beweis: (a): Die Folge $\left(\sum_{k=0}^n |a_k|\right)_{n \geq 0}$ ist monoton wachsend und daher genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.

(b): Mit $|a_k| \leq b_k$ gilt $b_k \geq 0$ für alle k . Somit ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sogar absolut konvergent. Nach Teil (a) ist die Folge $\left(\sum_{k=0}^n b_k\right)_{n \geq 0}$ beschränkt. Mit

$$\sum_{k=0}^n |a_k| \leq \sum_{k=0}^n b_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$$

folgt, dass $\left(\sum_{k=0}^n |a_k|\right)$ beschränkt und somit nach (a) absolut konvergent ist.

(c): Aus $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q$ ($\forall k \geq k_0$) folgt $|a_k| \leq q^{k-k_0} |a_{k_0}|$ per Induktion. Somit:

$$\sum_{k=0}^n |a_k| \leq \sum_{k=0}^{k_0-1} |a_k| + |a_{k_0}| \sum_{j=0}^{n-k_0} q^j \leq \sum_{k=0}^{k_0-1} |a_k| + |a_{k_0}| \frac{1}{1-q} < \infty$$

für alle n . Nach Teil (a) ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

(d): Aus $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q$ ($k \geq k_0$) folgt direkt $|a_k| \leq q^k$ für alle $k \geq k_0$. Somit:

$$\sum_{k=0}^n |a_k| \leq \sum_{k=0}^{k_0-1} |a_k| + \frac{q^{k_0}}{1-q} < \infty \implies \sum_{k=0}^n a_k \text{ absolut konvergent.}$$



Bemerkung:

- Das Quotienten- bzw. das Wurzelkriterium ist erfüllt, falls gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$$

- Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist dagegen divergent, falls gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1.$$



Beispiel. Wir untersuchen die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

Es gilt

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$$

und daher

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Daraus folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

Die Reihe ist somit (absolut) konvergent. □

Beispiel. Wir untersuchen die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r} \quad (r \in \mathbb{N}, r \geq 2)$$

Nach dem letzten Beispiel gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^r} &\leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \\ &< 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} < 2 \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist die Reihe (absolut) konvergent. □

Einige Grenzwerte (ohne Beweis):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

□

Beispiel. Wir untersuchen die Konvergenz der **Exponentialreihe**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

Anwendung des Quotientenkriteriums ergibt

$$\left| \frac{\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{z^k}{k!}} \right| = \left| \frac{z^{k+1} k!}{z^k (k+1)!} \right| = \frac{|z|}{k+1} \longrightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

Damit konvergiert die Reihe **für alle** $z \in \mathbb{C}$ (absolut).

Wir setzen

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

□

Der Umordnungssatz für Reihen.

Sei $\sigma : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine beliebige Bijektion (Permutation) auf \mathbb{N}_0 .

Ziel: Vergleiche die beiden Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k} \quad (\sigma_k = \sigma(k))$$

Satz: Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe, und sei $\sigma : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine beliebige Permutation auf \mathbb{N}_0 . Dann ist die umgeordnete Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k}$ ebenfalls absolut konvergent, und die Grenzwerte der beiden Reihen stimmen überein, d.h. es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k}.$$

Beweis: Für $m \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{k=0}^m |a_{\sigma_k}| \leq \sum_{k=0}^N |a_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|,$$

wobei $N \in \mathbb{N}_0$ so groß gewählt sei, dass $\{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m\} \subset \{0, 1, \dots, N\}$.

Somit ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k}$ absolut konvergent und es gilt

$$S' := \sum_{k=0}^{\infty} |a_{\sigma_k}| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| =: S.$$

Nun ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Umordnung der (absolut konvergenten) Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k}$, und somit gilt ebenso $S \leq S'$. Insgesamt bekommt man $S = S'$.

Wendet man dies auf die absolut konvergente Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (|a_k| + a_k)$ an, so bekommt man

$$S + \sum_{k=0}^{\infty} a_k = S' + \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k}$$

woraus die Behauptung $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k}$ folgt. ■

Multiplikation von Reihen.

Frage: Wie funktioniert das “Ausmultiplizieren” von Reihen?

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell \right) = ???$$

Produkt von endlichen Summen. Für *endliche* Summen gilt

$$(a_0 + \dots + a_m) \cdot (b_0 + \dots + b_n) = \sum_{k=0}^m a_k \left(\sum_{\ell=0}^n b_\ell \right) = \sum_{k=0}^m \sum_{\ell=0}^n a_k b_\ell.$$

Frage: Gilt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell \right) \stackrel{?}{=} \sum_{k,\ell=0}^{\infty} a_k b_\ell.$$

Beachte:

Jedes Indexpaar $(k, \ell) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ auf der rechten Seite tritt *genau* einmal auf.

Satz: Die Reihen $\sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell}$ und $\sum_{m=0}^{\infty} b_m$ seien absolut konvergent. Weiterhin sei $\sigma : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0, k \mapsto (\sigma_1(k), \sigma_2(k))$ für $k \in \mathbb{N}_0$, eine **bijektive** Abbildung. Dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)}$ absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)} = \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m \right).$$

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}_0$ und für hinreichend großes $N \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{k=0}^n |a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)}| \leq \sum_{\ell=0}^N |a_{\ell}| \sum_{m=0}^N |b_m| \leq \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} |a_{\ell}| \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} |b_m| \right) < \infty.$$

Somit ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)}$ absolut konvergent, und ihr Grenzwert ist nach dem Umordnungssatz unabhängig von der Permutation $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$.

Zur Berechnung des Grenzwertes wählt man eine spezielle Reihenfolge

$\sigma(k)$	0	1	2	3	...
0	0	3	8	15	...
1	1	2	7	14	...
2	4	5	6	13	...
3	9	10	11	12	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Für $N = (n + 1)^2 - 1$, mit $n \in \mathbb{N}_0$, bekommt man

$$\sum_{k=0}^N a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)} = (a_0 + a_1 + \dots + a_n)(b_0 + b_1 + \dots + b_n),$$

und somit

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{\ell=0}^n a_{\ell} \right) \left(\sum_{m=0}^n b_m \right) = \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m \right). \quad \blacksquare$$

Das Cauchy-Produkt von Reihen.

Weiterer Spezialfall: Nummerierung entlang der Diagonalen

$\sigma(k)$	0	1	2	3	...
0	0	2	5	9	...
1	1	4	8	13	...
2	3	7	12	18	...
3	6	11	17	24	...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	

Man erhält damit das **Cauchy-Produkt** der (absolut konvergenten) Reihen:

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) \\
 &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \dots
 \end{aligned}$$

Anwendung des Cauchy-Produkts.

Für die **Exponentialfunktion**

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad (z \in \mathbb{C})$$

gilt die **Funktionalgleichung**

$$\exp(z + w) = \exp(z) \exp(w)$$

Begründung: Die obige Reihe $\exp(z)$, $z \in \mathbb{C}$, ist absolut konvergent. Damit folgt

$$\begin{aligned} \exp(z) \exp(w) &= \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{z^{\ell}}{\ell!} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^m}{m!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z + w)^n = \exp(z + w). \quad \square \end{aligned}$$