Rechenoperationen mit Folgen.

Die Menge aller Folgen in V bildet einen Vektorraum, $V^{\mathbb{N}}$, für den die *Addition* und *skalare Multiplikation* wie folgt definiert sind.

$$\begin{aligned} (a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} &:= (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ \lambda(a_n)_{n\in\mathbb{N}} &:= (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

Rekursion und Iteration.

Folgen lassen sich `rekursiv` beschreiben durch

$$a_{n+1} := \Phi(n, a_n), \qquad \text{für } n \in \mathbb{N},$$

wobei

$$\Phi : \mathbb{N} \times V \to V$$

eine bestimmte `Iterationsvorschrift` bezeichnet.

Das Bisektionsverfahren (Intervallhalbierung).

- **Ziel:** Bestimme eine Nullstelle einer stetigen Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
- **Voraussetzung:** $f(a) \cdot f(b) < 0$.
- **Iteration:** Definiere zwei Folgen $(u_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(v_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ rekursiv mit den Startwerten $(u_0, v_0) = (a, b)$ und der folgenden Iterationsvorschrift.

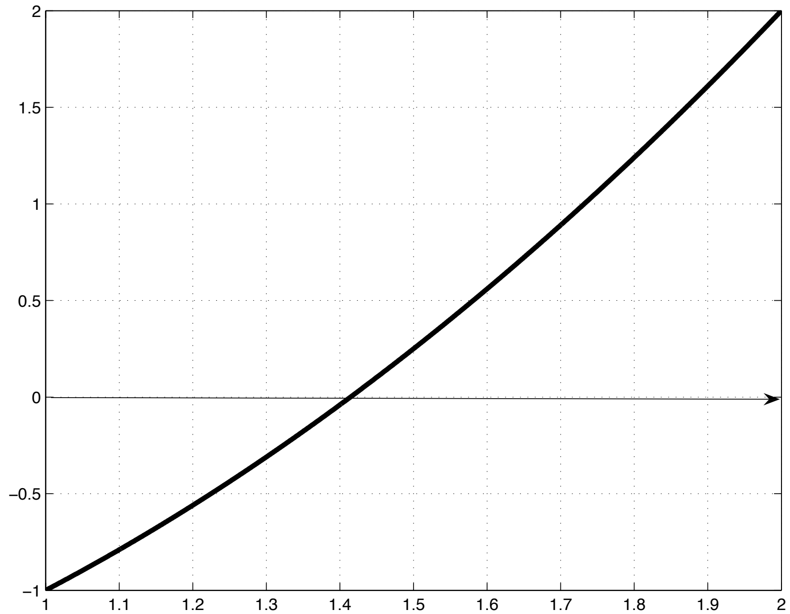
$$
\begin{array}{l}
\texttt{FOR } n = 1, 2, \ldots \\
\quad x := (u_{n-1} + v_{n-1})/2 \\
\quad \texttt{IF } f(x) = 0 \texttt{ THEN RETURN} \\
\quad \texttt{IF } (f(x) \cdot f(v_{n-1}) < 0) \texttt{ THEN} \\
\qquad u_n := x; \quad v_n := v_{n-1}; \\
\quad \texttt{ELSE} \\
\qquad u_n := u_{n-1}; \quad v_n := x;
\end{array}
$$

OUTPUT: x mit $f(x) = 0$, Nullstelle von f in $[a, b]$.

Beispiel. $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - 2$, $a = 1$ und $b = 2$.

Beachte: $f(\sqrt{2}) = 0$, d.h. $\sqrt{2} = 1.4142\,13562\ldots$ ist Nullstelle von f.

n	u_n	v_n
0	1.0000 00000	2.0000 00000
1	1.0000 00000	1.5000 00000
2	1.2500 00000	1.5000 00000
3	1.3750 00000	1.5000 00000
10	1.4140 62500	1.4150 39063
20	1.4142 13181	1.4142 14134
30	1.4142 13562	1.4142 13562



Graph von $f(x) = x^2 - 2$.

Beobachtung: Das Bisektionsverfahren konvergiert relativ langsam!

Das Newton-Verfahren.

- **Ziel:** Bestimme eine Nullstelle einer *differenzierbaren* Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
- **Verwende** Newton-Iteration**:**

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad \text{für } f'(x_n) \neq 0,$$

mit Startwert x_0.

Bemerkung: Verfahren *konvergiert*, falls x_0 nahe bei einer Nullstelle von f liegt.

Beispiel: Für $f(x) = x^2 - 2$ und $x_0 = 1$ erhält man

n	0	1	2	3	4	$\cdots$
t_n	1.0000	1.5000	1.4166 66667	1.4142 15686	1.4142 13562	$\cdots$

Erinnerung: $f(\sqrt{2}) = 0$, d.h. $\sqrt{2} = 1.4142\,13562\ldots$ ist Nullstelle von f.

Konvergenz von Folgen.

Definition: *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem normierten Vektorraum V. Dann heißt*

- $(a_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ *für* $n_j \in \mathbb{N}$ *mit* $1 \le n_1 < n_2 < \ldots$ *eine* Teilfolge *von* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- *die Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, *falls es ein* $C > 0$ *gibt mit*

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \|a_n\| \le C.$$

- *die Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent *mit* Grenzwert *(*Limes*)* $a \in V$, *falls*

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall\, n \ge N : \|a_n - a\| < \varepsilon.$$

  Eine nicht-konvergente Folge heißt divergent.

- *die Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge, *falls*

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall\, n, m \ge N : \|a_n - a_m\| < \varepsilon.$$

$\square$

Satz: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem normierten Vektorraum. Dann gilt:

(a) (a_n) konvergent $\Longrightarrow$ (a_n) beschränkt;

(b) (a_n) konvergent $\Longrightarrow$ (a_n) Cauchy-Folge;

(c) Falls (a_n) konvergiert, so ist der Grenzwert von (a_n) eindeutig bestimmt.

Beweis von (a): Sei (a_n) konvergent mit Grenzwert a. Dann gilt für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ die *Abschätzung*

$$\|a_n\| = \|a_n - a + a\| \le \|a_n - a\| + \|a\| < \varepsilon + \|a\| \qquad \text{für alle } n \ge N(\varepsilon).$$

Damit ist die Folge (a_n) beschränkt mit der Konstanten

$$C = \max\{\|a_1\|, \|a_2\|, \ldots, \|a_{N-1}\|, \|a\| + \varepsilon\}.$$

Also

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \|a_n\| \le C.$$

$\square$

Beweis von (b): Sei (a_n) konvergent mit Grenzwert a. Dann gilt für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ die *Abschätzung*

$$\begin{aligned} \|a_n - a_m\| &= \|a_n - a + a - a_m\| \\ &\leq \|a_n - a\| + \|a_m - a\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $n, m \geq N = N(\varepsilon/2)$ □

Beweis von (c): Sei (a_n) konvergent mit *verschiedenen* Grenzwerten a und $\overline{a}$. Dann gelten für $\varepsilon > 0$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|a_n - a\| < \varepsilon & \quad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon) \\ \|a_n - \overline{a}\| < \varepsilon & \quad \text{für alle } n \geq \overline{N}(\varepsilon) \end{aligned}$$

Somit folgt für $n \geq \max\{N, \overline{N}\}$ die Ungleichung

$$\|a - \overline{a}\| = \|a - a_n + a_n - \overline{a}\| \leq \|a_n - a\| + \|a_n - \overline{a}\| < 2\varepsilon.$$

Da dies für *jedes* $\varepsilon > 0$ gilt, folgt $a = \overline{a}$ im Widerspruch zur Annahme $a \neq \overline{a}$. ■

Notationen.

Für eine konvergente Folge (a_n) mit Grenzwert a schreiben wir

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{oder} \qquad a_n \to a \quad (n \to \infty).$$

Uneigentliche Konvergenz ...

... bzw. Divergenz gegen den uneigentlichen Grenzwert $\pm\infty$.

Für *reelle* Folgen definieren wir zusätzlich

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, C > 0 : \exists\, N \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq N : a_n > C$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, C > 0 : \exists\, N \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq N : a_n < -C$$

$\square$

Bemerkungen.

Die Umkehrung der Aussage im Satz, Teil (b),

$$(a_n) \text{ Cauchyfolge} \qquad \Longrightarrow \qquad (a_n) \text{ konvergent}$$

gilt nur in *gewissen* normierten Räumen, nämlich in

vollständigen Räumen bzw. **Banachräumen.**

Einen vollständigen *Euklidischen Vektorraum* nennt man

Hilbertraum.

Beispiele:

- für vollständige Räume: $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(\mathbb{C}, |\cdot|)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$;
- für einen nicht vollständigen Raum: $(C[a,b], \|\cdot\|_2)$.

Satz: *Seien* (a_n) *und* (b_n) *zwei konvergente Folgen. Dann konvergieren die beiden Folgen* $(a_n + b_n)$ *und* (λa_n) *für* $\lambda \in \mathbb{R}$ *(bzw.* $\lambda \in \mathbb{C}$*), wobei gilt*

(a) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$,

(b) $\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n$.

Beweis: Sei $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b = \lim_{n\to\infty} b_n$, d.h. a sei Grenzwert von (a_n) und b sei Grenzwert von (b_n).

(a): Für $n \geq \max\{N_1(\varepsilon/2), N_2(\varepsilon/2)\}$ gilt

$$\|(a_n + b_n) - (a + b)\| \leq \|a_n - a\| + \|b_n - b\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(b): Sei $\lambda \neq 0$. Dann gilt für $n \geq N_1(\varepsilon/|\lambda|)$ die Abschätzung

$$\|\lambda a_n - \lambda a\| = |\lambda| \cdot \|a_n - a\| < |\lambda| \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$$

Der Fall $\lambda = 0$ ist *trivial*. ■

Konvergenzgeschwindigkeit.

Definition: *Sei* (a_n) *eine konvergente Folge mit Grenzwert* a.

(a) Die Folge (a_n) *heißt (mindestens)* `linear konvergent`*, falls eine Konstante* $0 < C < 1$ *und ein Index* $N \in \mathbb{N}$ *existiert mit*

$$\forall\, n \geq N : \|a_{n+1} - a\| \leq C\|a_n - a\|$$

(b) Die Folge (a_n) *heißt (mindestens)* `superlinear konvergent`*, falls es eine nicht-negative Nullfolge* $C_n \geq 0$ *gibt mit* $\lim_{n\to\infty} C_n = 0$*, so dass*

$$\forall\, n : \|a_{n+1} - a\| \leq C_n\|a_n - a\|$$

(c) Die Folge (a_n) *heißt* `konvergent` *der* `Ordnung` *(mindestens)* $p > 1$*, falls es eine nicht-negative Konstante* $C \geq 0$ *gibt mit*

$$\forall\, n : \|a_{n+1} - a\| \leq C\|a_n - a\|^p.$$

□

Folgen

$$a_n = \frac{n-1}{n} \qquad \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots \qquad k \le a_n \le c$$

$$1 - 1/n$$

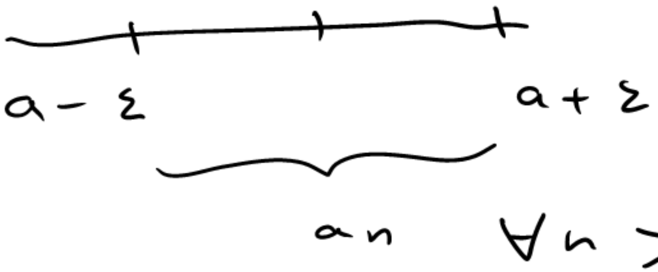
$$b_n = \frac{n+1}{n} \qquad \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots$$

$$1 + 1/n$$

$$c_n = n^2 \qquad 1, 4, 9, 16, \ldots \longrightarrow \infty$$

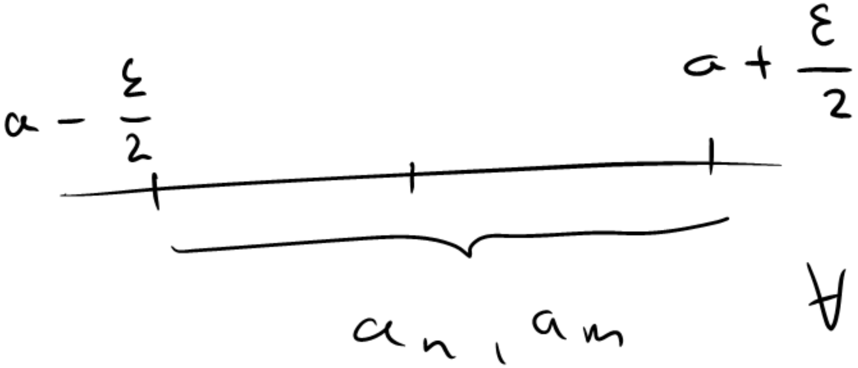
konv $\quad a_n \longrightarrow a \qquad |a_n - a| < \varepsilon \qquad \forall n > N_\varepsilon$

$=$



Cauchyfolge $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N$

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \qquad \forall n,m \geq N$$



$\forall n,m > N$

4 Konvergenz von Folgen und Reihen

4.1 Konvergenzkriterien für reelle Folgen

Definition: *Eine reelle Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt*

monoton wachsend $\iff$ $\forall n < m : a_n \leq a_m$

streng monoton wachsend $\iff$ $\forall n < m : a_n < a_m$

nach oben beschränkt $\iff$ $\exists C \in \mathbb{R} : \forall n : a_n \leq C$

$a_n = 1 - \frac{1}{n} \leq 1$ $\leq$ 50

Analog definiert man die Begriffe

$1 = \sup\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$

monoton fallend $\iff$ $\forall n < m : a_n \geq a_m$

streng monoton fallend $\iff$ $\forall n < m : a_n > a_m$

nach unten beschränkt $\iff$ $\exists C \in \mathbb{R} : \forall n : a_n \geq C$

$a_n \geq$ $\inf(a_n) = 0$

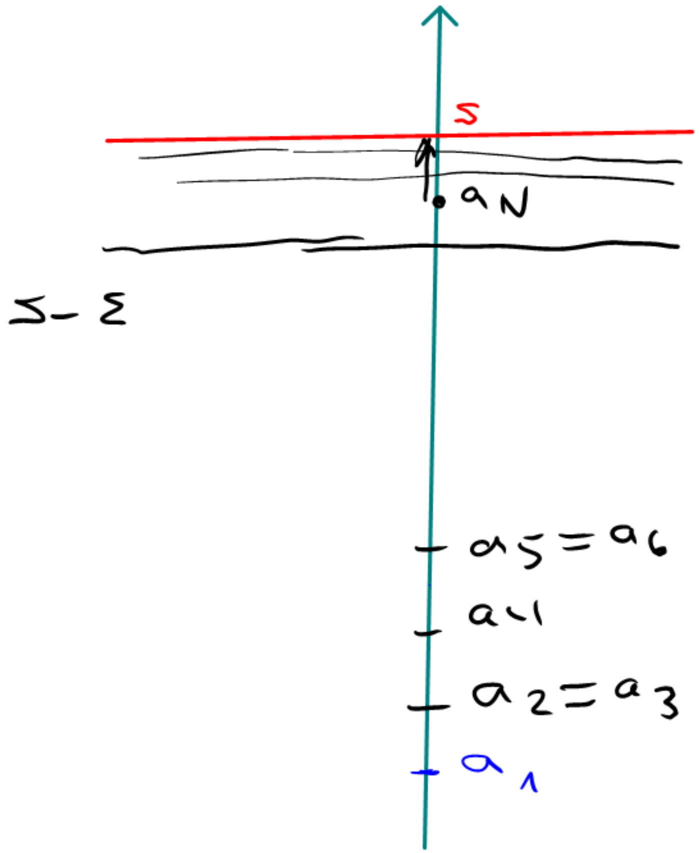
□

fallend unten

Satz: *Eine monoton wachsende, nach oben beschränkte reelle Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist konvergent mit Grenzwert*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}.$$

inf



Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt. Dann gilt

$$s = \sup\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $N = N(\varepsilon)$ mit

$$s - \varepsilon < a_N \le s$$

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend, also folgt

$$s - \varepsilon < a_N \le a_n \le s \quad \forall\, n \ge N,$$

d.h.

$$|s - a_n| < \varepsilon \quad \forall\, n \ge N \equiv N(\varepsilon)$$

■

Folgerung (Prinzip der Intervallschachtelung):

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine monoton wachsende reelle Folge und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine monoton fallende reelle Folge mit*

$$\boxed{a_n \le b_n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

$b_n \geq a_1$

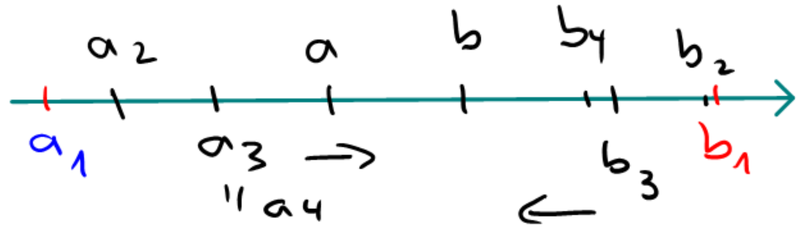
$a_n \leq b_1$

$a_n \to a$

$b_n \to b$

Dann sind **beide** *Folgen konvergent. Gilt weiterhin*

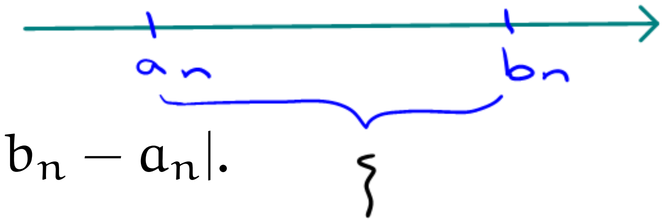
$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0,$$



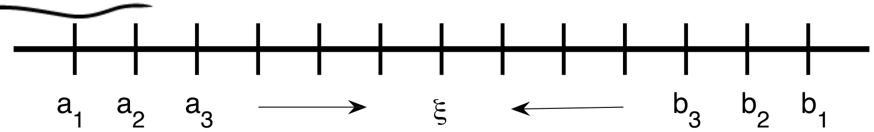
so haben $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *denselben Grenzwert, d.h. es gibt ein* $\xi \in \mathbb{R}$ *mit*

$$\xi = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Weiterhin gelten in diesem Fall die Fehlerabschätzungen



$$|a_n - \xi| \le |b_n - a_n| \qquad \textit{und} \qquad |b_n - \xi| \le |b_n - a_n|.$$

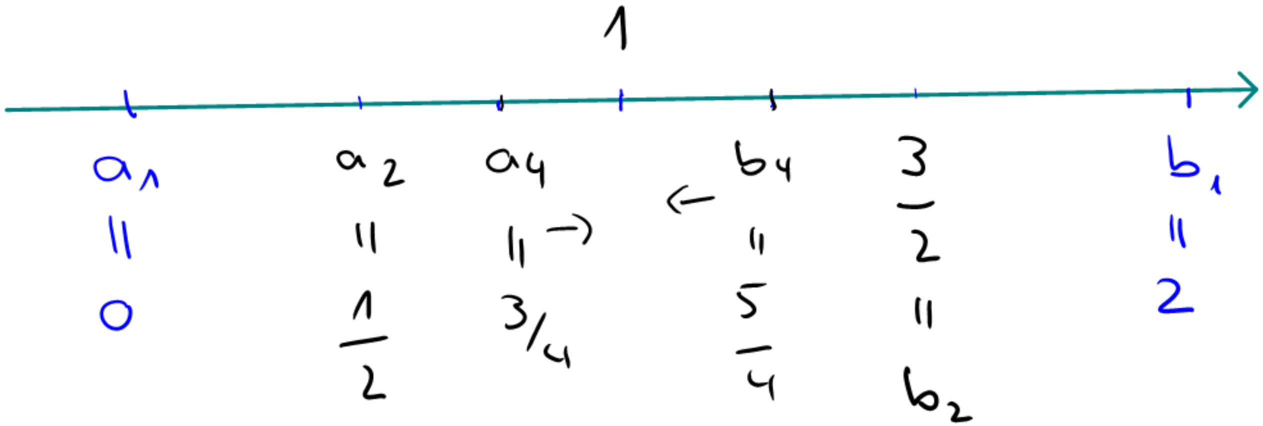


$|a_n - \xi| \leq |b_n - a_n|$

□

$$a_n = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$

$$b_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$



Beispiel.

Definiere für $0 < a < b$ zwei Folgen (a_n) und (b_n) *rekursiv* durch

$$\begin{aligned} a_0 &:= a & b_0 &:= b \\ a_{n+1} &:= \sqrt{a_n b_n} & b_{n+1} &:= (a_n + b_n)/2 \quad \text{für } n \geq 0. \end{aligned}$$

Die Folgen (a_n) und (b_n) bilden *Intervallschachtelung*, und es gilt

$$(b_{n+1} - a_{n+1}) \leq \frac{b_n - a_n}{2}$$

Der gemeinsame Grenzwert von (a_n) und (b_n)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

heißt `arithmetisch-geometrisches Mittel` von a und b. $\square$

$a_n = 2^n \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \to \infty$

$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \to 0$

Die Bernoullische Ungleichung.

Es gilt

$$\forall\, x \geq -1,\ n \in \mathbb{N} : \boxed{(1+x)^n \geq 1 + nx,}$$

wobei Gleichheit nur für $n = 1$ oder $x = 0$ gilt.

Beweis: vollständige Induktion. (vgl. Aufgabe 4a) iii Blatt 2)

Die Geometrische Folge.

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folge mit $a_n := q^n$ für $q \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
q > 1 &: \quad \lim_{n\to\infty} q^n = +\infty \quad (q^n = (1 + (q-1))^n \geq 1 + n(q-1)) \\
q = 1 &: \quad \lim_{n\to\infty} q^n = 1 \\
0 < q < 1 &: \quad \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad \left(q^n = \frac{1}{(1+(1/q-1))^n} \leq \frac{1}{1+n(1/q-1)}\right) \\
-1 < q \leq 0 &: \quad \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad (|q^n| = |q|^n) \\
q = -1 &: \quad (q^n) \text{ beschränkt, aber nicht konvergent} \quad (q^n \in \{-1, 1\}) \\
q < -1 &: \quad (q^n) \text{ divergent, kein uneigentlicher Grenzwert}
\end{aligned}$$

$q > 1$ z.B $q = 2$ $\quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \ldots$

$$q^n = \Big(1 + \underbrace{(q-1)}_{>0}\Big)^n \geq \underbrace{1 + n\underbrace{(q-1)}_{>0}}_{\to \infty} \longrightarrow \infty$$

$0 < q < 1$ $\quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \ldots$

$$q^n = \left(\frac{1}{\frac{1}{q}}\right)^n = \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{q} - 1\right)}\right)^n = \frac{1}{\Big(1 + \underbrace{\left(\frac{1}{q} - 1\right)}_{>0}\Big)^n} \begin{matrix} \longrightarrow 0 \\ \longrightarrow \infty \end{matrix}$$

$$\left(1 + \left(\frac{1}{q} - 1\right)\right)^n \geq \underbrace{1 + n\left(1/q - 1\right)}_{\longrightarrow \infty}$$

Weitere Rechenregeln.

$a_n \longrightarrow a$

$b_n \longrightarrow b$

Satz: *Seien* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergente reelle Folgen. Dann gilt*

(a) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n)$

$a \cdot b$

(b) $\forall n: b_n \neq 0 \wedge \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$

(c) $\forall n: a_n \geq 0 \wedge m \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{\lim_{n\to\infty} a_n}$

Beweis: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

$a_n \to a \qquad b_n \to b$

$|a_n - a| \to 0$

$|b_n - b| \to 0$

Beweis von (a): Für $\varepsilon > 0$ und $n \geq N \equiv N(\varepsilon)$ gilt

$$
\begin{aligned}
|a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\
&\leq |a_n| \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| \\
&\leq C_a \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| \to 0 \\
&< (C_a + |b|)\varepsilon
\end{aligned}
$$

$= |a_n \underbrace{(b_n - b)}_{\to 0} + b \underbrace{(a_n - a)}_{\to 0}|$

$\leq |a_n(b_n - b)| + |b(a_n - a)|$

Beweis von (b): Da $b_n \neq 0$ und $b \neq 0$ existiert eine Konstante $C_b > 0$ mit

$$C_b \leq |b_n| \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

$a_n \cdot \frac{1}{b_n}$

$\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$

Damit gilt

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - b_n}{b_n b} \right| = \frac{1}{\underbrace{|b_n| \cdot |b|}_{\text{beschränkt} \, > 0}} \cdot \overbrace{|b_n - b|}^{\to 0} < \frac{1}{C_b \cdot |b|} \cdot \varepsilon$$

für hinreichend große $n \geq N \equiv N(\varepsilon)$.

Nun folgt die Aussage in Teil (b) direkt aus Teil (a), denn es gilt $1/b_n \to 1/b$.

Beweis von (c): Wir setzen hierzu folgenden Satz voraus.

Satz: Zu $a > 0$ und $m \in \mathbb{N}$ existiert genau eine Zahl $w > 0$ mit $w^m = a$. Diese Zahl wird mit $w = \sqrt[m]{a}$ bezeichnet.

$a_n \to a$

Ziel $\sqrt[m]{a_n} \to \sqrt[m]{a}$

Fall 1: Sei (a_n) eine Nullfolge und $\varepsilon > 0$ vorgegeben.

$a_n \to 0 = a$

$$a_n < \varepsilon^m \quad \forall\, n \geq N(\varepsilon^m)$$

$(x-y)(x^1y^0 + x^0y^1)$

Daraus folgt

$$0 \leq \sqrt[m]{a_n} < \varepsilon$$

$= x^2 - y^2$

und daher $\sqrt[m]{a_n} \to 0$ für $n \to \infty$.

$(x-y)(x^2y^0 + x^1y^1 + x^0y^2) = x^3y^0 + x^2y^1 + x^1y^2 - x^2y^1 - x^1y^2 - x^0y^3$

$= x^3 - y^3$

Fall 2: Sei $a > 0$. Verwende die Identität

$$
\begin{aligned}
&(x-y)\sum_{j=1}^{m} x^{m-j}y^{j-1} \\
= \;& (x-y)\cdot\left(x^{m-1}y^0 + x^{m-2}y^1 + \ldots + x^0y^{m-1}\right) \\
= \;& x^my^0 + \underbrace{x^{m-1}y^1 + \ldots + x^1y^{m-1} - x^{m-1}y^1 - \ldots - x^1y^{m-1}}_{=0} - x^0y^m \\
= \;& x^m - y^m \qquad \Longrightarrow \quad x - y = \frac{x^m - y^m}{(x^{m-1}y^0 + \ldots + x^0y^{m-1})}
\end{aligned}
$$

Setze nun $x = \sqrt[m]{a_n}$ und $y = \sqrt[m]{a}$. Dann folgt für $\varepsilon > 0$ und $n \geq N(\varepsilon)$:

$$
\begin{aligned}
\Big|\underbrace{\sqrt[m]{a_n}}_{x} - \underbrace{\sqrt[m]{a}}_{y}\Big| \;&=\; \frac{\overset{x^m}{|a_n} \overset{-y^m}{- a|}}{\Big|\underbrace{(\sqrt[m]{a_n})^{m-1} + \ldots}_{>0} + (\sqrt[m]{a})^{m-1}\Big|} \\
&\leq\; \frac{|a_n - a|}{\underbrace{(\sqrt[m]{a})^{m-1}}_{\text{fest}}} \longrightarrow 0 \\
&<\; C\cdot\varepsilon \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Beispiel.

speziell $x - y = \frac{x^2 - y^2}{x+y}$

Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \left(\underbrace{\sqrt{n^2+5n+1}}_{\to\infty} - \underbrace{n}_{\to\infty}\right) \cdot \frac{x+y}{x+y} = \frac{x^2-y^2}{x+y}$$

Es gilt

$$(n^2+5n+1) - n^2 = \left(\sqrt{n^2+5n+1} - n\right)\left(\sqrt{n^2+5n+1} + n\right),$$

woraus folgt

$$a_n = \frac{(n^2+5n+1) - n^2}{\underbrace{\sqrt{n^2+5n+1}}_{x} + \underbrace{n}_{y}} = \frac{5n+1}{\sqrt{n^2+5n+1}+n} = \frac{5+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{5+0}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{5}{2}.$$

□

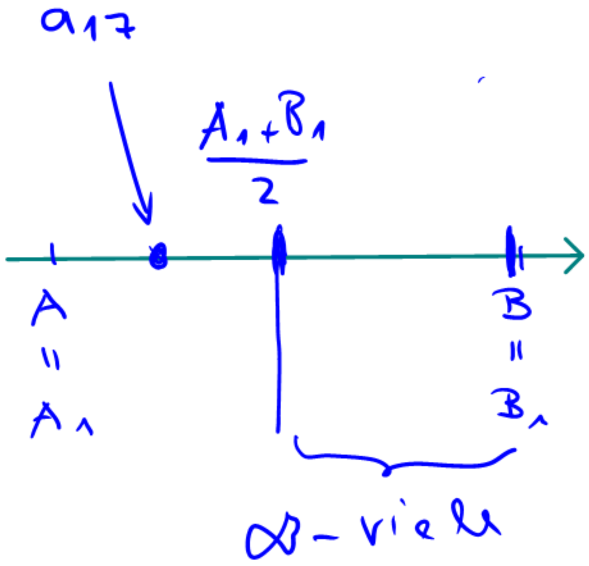
Der Satz von Bolzano-Weierstraß.

Satz (Bolzano-Weierstraß):
Jede reelle beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle beschränkte Folge. Dann gibt es ein Intervall $[A, B]$ mit $\forall n : a_n \in [A, B]$. Betrachte nun die folgende Bisektionsmethode.

$A \leq a_n \leq B$
$\forall n$

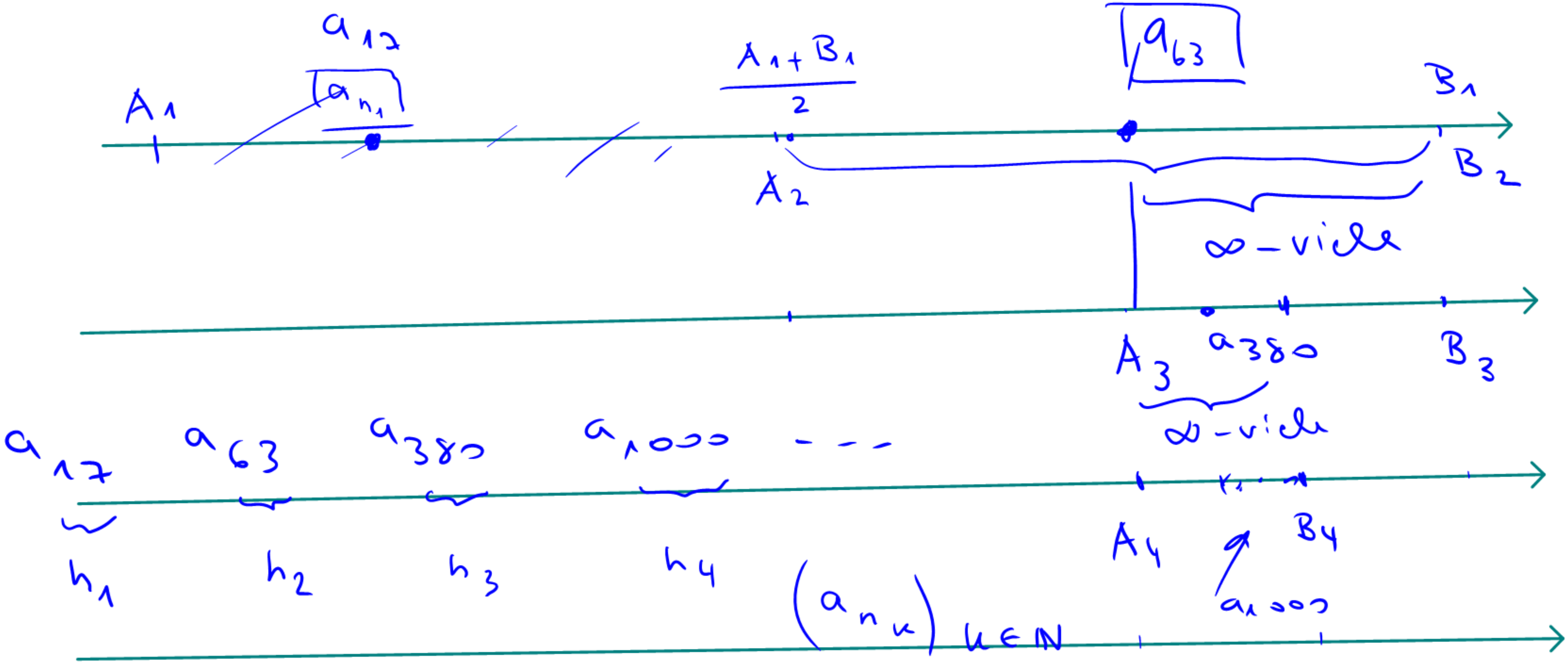
$$
\boxed{
\begin{array}{l}
A_1 := A; \\
B_1 := B; \\
\texttt{FOR } k = 1, 2, 3, \ldots \\
\qquad C := (A_k + B_k)/2 \\
\qquad \texttt{IF } \{n \mid a_n \in [A_k, C]\} \text{ unendlich } \texttt{THEN} \\
\qquad\qquad A_{k+1} := A_k; \quad B_{k+1} := C; \\
\qquad \texttt{ELSE} \\
\qquad\qquad A_{k+1} := C; \quad B_{k+1} := B_k;
\end{array}
}
$$



a_n

$A_2 = \frac{A_1+B_1}{2}$

$B_1 = B_2$



a_{17}
$\boxed{a_{n_1}}$
A_1
$\frac{A_1+B_1}{2}$
$\boxed{a_{63}}$
B_1
A_2
B_2
∞-viele
A_3
a_{380}
B_3
∞-viele
a_{17} a_{63} a_{380} a_{1000} - - -
n_1 n_2 n_3 n_4
A_4
B_4
a_{1000}
$(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$

Beobachtung: Die Folgen (A_k) und (B_k) bilden eine Intervallschachtelung, d.h. $\forall\, k: A_k \leq B_k$, und es gibt einen gemeinsamen Grenzwert

$$\xi = \lim_{k\to\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} B_k.$$

Definiere nun eine Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) wie folgt.

- Setze $n_1 := 1$;
- `FOR` $k = 2, 3, 4, \ldots$

  wähle $n_k > n_{k-1}$ mit $a_{n_k} \in [A_k, B_k]$.

Wegen

$$A_k \leq a_{n_k} \leq B_k, \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N},$$

gilt dann $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \xi$. ■

Definition: *Sei $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann wird der Grenzwert der Teilfolge $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ als* Häufungspunkte *der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet.* □

Cauchy-Folge $\forall \frac{\varepsilon}{2}$ $\exists N$ mit

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n,m \geq N$$

$$\Longrightarrow |a_n - a_N| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Longrightarrow |a_n| = |\underbrace{a_n - a_N} + a_N| \leq C$$

$$\leq \underbrace{|a_n - a_N|}_{< \varepsilon/2} + |\underbrace{a_N}_{\text{fest}}| < \underbrace{\frac{\varepsilon}{2} + |a_N|}_{C} \leq C$$

$$\Longrightarrow \exists \text{ konv. Teilfolge } (a_{n_k}) \longrightarrow \xi \quad \circledast\ |a_{n_k} - \xi| \to 0$$

Ziel $a_n \longrightarrow \xi$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\underbrace{|a_n - \xi|}_{\longrightarrow 0} = |\underbrace{a_n - a_{n_k}}_{\downarrow\ 0\ \to\ \forall n, n_k > N \text{ wg. Cauchy}} + \underbrace{a_{n_k} - \xi}_{\circledast \longrightarrow 0}| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - \xi|$$

Das Cauchysche Konvergenzkriterium.

Satz: *Der Körper $\mathbb{R}$ ist* `vollständig`*, d.h. jede reelle Cauchyfolge konvergiert.*

Beweis: Zeige, dass jede Cauchyfolge beschränkt ist: Für n und $N = N(\epsilon)$ gilt

$$|a_n| = |a_n - a_N + a_N| \le |a_n - a_N| + |a_N| < \varepsilon + |a_N|$$

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt (a_n) einen Häufungspunkt ξ.
Dann gilt für $m, n_k \ge N(\varepsilon/2)$:

$$\begin{aligned} |a_m - \xi| &= |a_m - a_{n_k} + a_{n_k} - \xi| \\ &\le \underbrace{|a_m - a_{n_k}|}_{\text{Cauchyfolge}} + \underbrace{|a_{n_k} - \xi|}_{\text{Häufungspunkt}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Notation:

$\liminf a_n$ = kleinster Häufungspunkt, $\limsup a_n$ = größter Häufungspunkt.

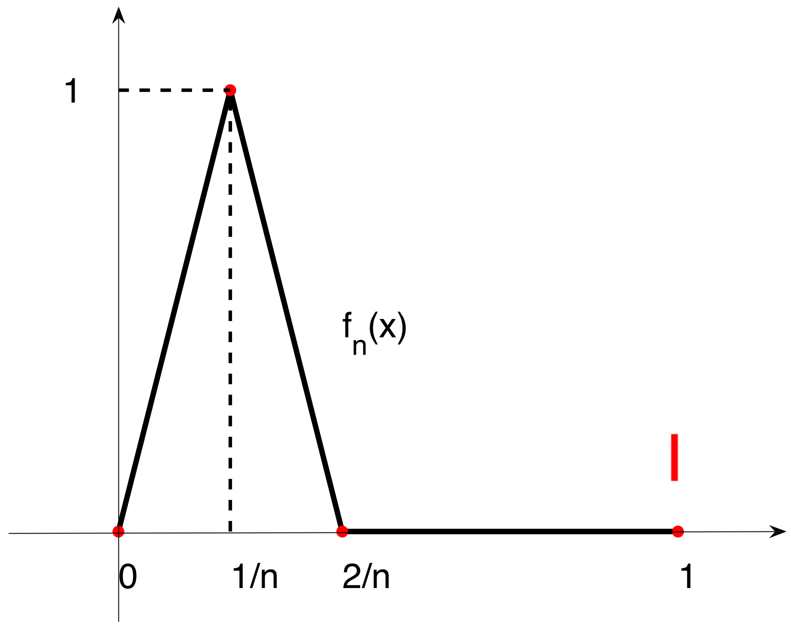
4.2 Konvergenz in normierten Vektorräumen

Beispiel. Betrachte den Vektorraum $C[0,1]$ aller stetigen Funktionen auf $[0,1]$.

Für jedes $n \geq 2$ liegt die Funktion

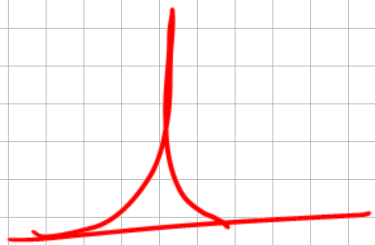
$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{für } x \in [0, 1/n]; \\ 2 - nx & \text{für } x \in [1/n, 2/n]; \\ 0 & \text{für } x \in [2/n, 1]; \end{cases}$$

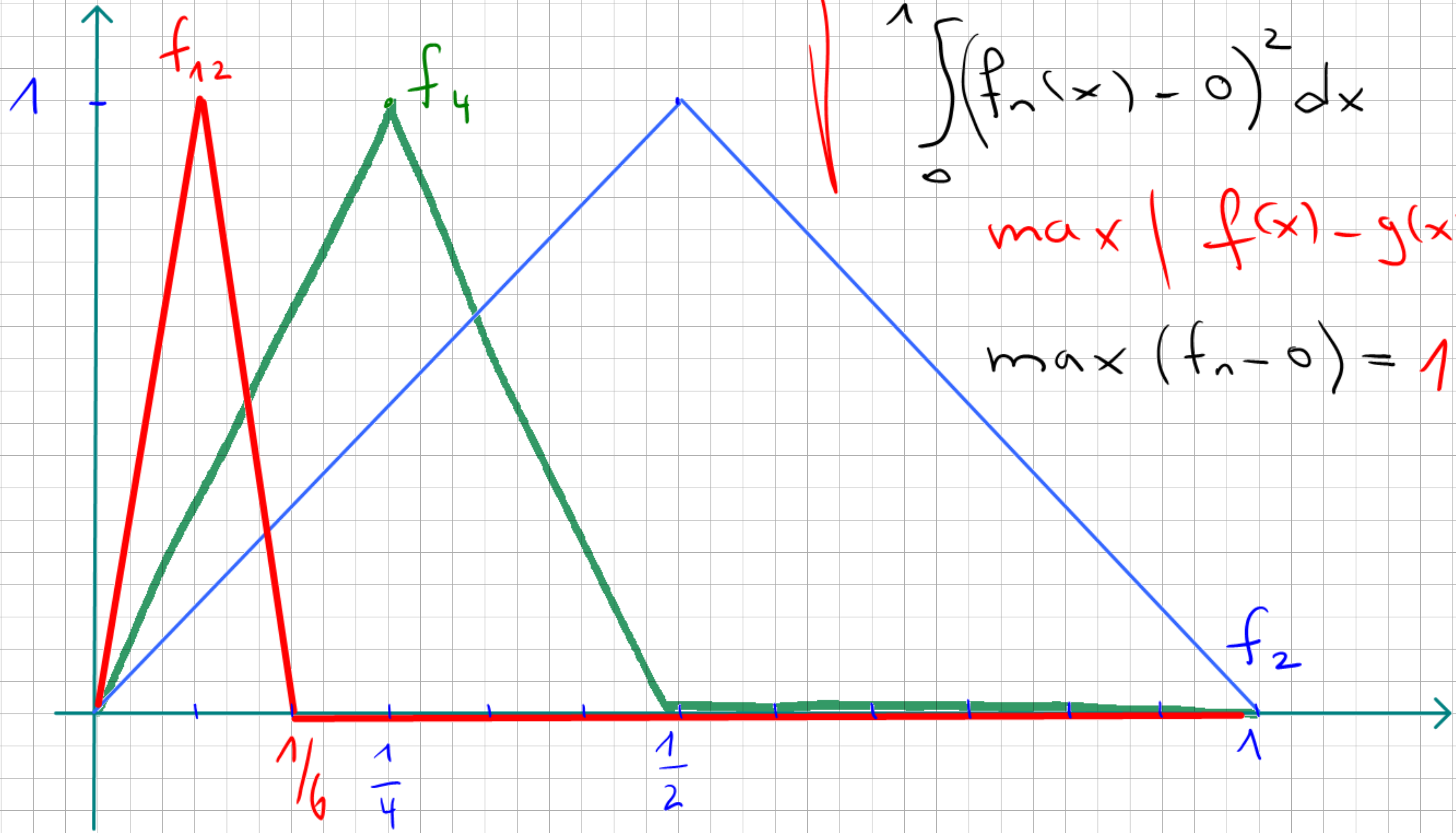
in $C[0,1]$, d.h. $f_n \in C[0,1]$ für alle $n \geq 2$.



Der Graph von $f_n(x)$.

Beobachtung: $\{f_n\}_{n \geq 2}$ bildet eine Folge von Funktionen in $C[0,1]$.





$$\sqrt{\int_0^1 \left(f_n(x) - 0\right)^2 dx}$$

$$\max |f(x) - g(x)|$$

$$\max (f_n - 0) = 1$$

Wie sieht es mit der Konvergenz von f_n in $C[0,1]$ aus?

Fall 1. Verwende die Euklidische Norm $\|\cdot\|_2$. Dann gilt

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^1 (f_n(x))^2\,dx = \int_0^{1/n} (nx)^2\,dx + \int_{1/n}^{2/n} (2-nx)^2\,dx + \int_{2/n}^1 0\,dx = \ldots = \frac{2}{3n}$$

und somit $\|f_n\|_2 \leq 1/\sqrt{n}$ für $n \geq 2$. Die Folge $\{f_n\}_{n\geq 2}$ ist somit bezüglich der Euklidischen Norm eine Nullfolge in $C[0,1]$, d.h. $\{f_n\}_{n\geq 2}$ konvergiert gegen Null.

Fall 2. Verwende die Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$. Dann gilt

$$\|f_n\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = 1, \qquad \text{für alle } n \geq 2,$$

und es gibt *keine* stetige Funktion $f \in C[0,1]$ mit $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ für $n \to \infty$.

Somit divergiert die Folge $\{f_n\}_{n\geq 2}$ in $C[0,1]$ bezüglich der Maximumnorm.

Fazit: Die Konvergenz einer Folge $(a_n)_n$ ist im Allgemeinen nicht nur abhängig vom zugrunde liegenden Vektorraum V, sondern auch (und vor allem!) von der verwendeten Norm $\|\cdot\|$. $\square$

Konvergenz in endlichdimensionalen Vektorräumen.

Bemerkung: In endlichdimensionalen Vektorräumen ist die Konvergenz (und der Grenzwert) einer Folge jedoch lediglich von dem jeweiligen Vektorraum abhängig, nicht von der zugrunde liegenden Norm.

Satz (Normäquivalenzsatz): *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum, und seien $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ zwei Normen auf V. Dann gibt es Konstanten $C, C' > 0$ mit*

$$C\|v\| \leq \|v\|' \leq C'\|v\|, \qquad \textit{für alle } v \in V,$$

d.h. die beiden Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ sind äquivalent auf V. □

Fazit: Eine Folge (a_n), die in einem endlichdimensionalen Vektorraum V bezüglich einer Norm $\|\cdot\|$ in V gegen einen Grenzwert $a \in V$ konvergiert, konvergiert ebenso bezüglich jeder anderen Norm $\|\cdot\|'$ in V gegen a. □

- **Beispiele für endlichdimensionale Vektorräume:** $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$.
- **Beispiel für einen unendlichdimensionalen Vektorraum:** $C[a, b]$.

Konvergenz von Folgen im $\mathbb{R}^n$.

Folgerung: *Eine Folge* $(\mathbf{x}_m)$ *im* $\mathbb{R}^n$ *konvergiert genau dann, wenn alle* n *Koordinatenfolgen* $(x_j^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$, $j = 1, \dots, n$, *in* $\mathbb{R}$ *konvergieren. Der Grenzwert der Folge* $(\mathbf{x}_m)$ *lässt sich komponentenweise berechnen.*

Beweis: $\mathbf{x}_m \to \mathbf{x}$ ist äquivalent zu

$$\|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}\|_\infty \to 0 \quad \iff \quad \forall 1 \le j \le n : |x_j^{(m)} - x_j| \to 0, \quad m \to \infty,$$

und somit $x_j^{(m)} \to x_j$, $m \to \infty$, für alle $j = 1, \dots, n$. $\blacksquare$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Beispiel: Für die Folge $(\mathbf{x}_m)$, gegeben durch

$$\mathbf{x}_m = \left(\frac{1}{m}, 1 + \exp\left(\frac{1}{m}\right), \frac{m^2+2m+3}{2m^2-1}\right)^T \in \mathbb{R}^3 \quad \text{für } m \in \mathbb{N}.$$

$$\left\| \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\|_\infty \to 0$$

gilt

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{x}_m = (0, 2, 1/2)^T \in \mathbb{R}^3.$$

$$\max\{\underbrace{|a_n - a|}_{\to 0}, \underbrace{|b_n - b|}_{\to 0}, \underbrace{|c_n - c|}_{\to 0}\} \to 0$$

$\square$

Konvergenz in endlichdimensionalen Vektorräumen.

Folgerung: In endlichdimensionalen Vektorräumen gilt

- das Cauchysche Konvergenzkriterium:

$$\exists\, \mathbf{a} \;:\; \mathbf{a}_m \to \mathbf{a} \; (m \to \infty)$$

$$\iff \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N \equiv N(\varepsilon) \;:\; m, n \geq N \;:\; \|\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_n\| < \varepsilon$$

- der Satz von Bolzano-Weierstraß:
  Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beispiel: Für $a_n := z^n$, $z \in \mathbb{C}$ gegeben, gilt

$$|z| > 1 \quad \Longrightarrow \quad |a_n| = |z|^n \text{ unbeschränkt} \Longrightarrow (a_n) \text{ divergent;}$$

$$|z| < 1 \quad \Longrightarrow \quad |a_n| = |z|^n \to 0 \; (n \to \infty) \quad \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} z^n = 0.$$

$\square$

$s_0 = a_0$

$s_1 = a_0 + a_1$

$s_2 = a_0 + a_1 + a_2$

4.3 Konvergenzkriterien für Reihen

Definition: *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $a_n \in \mathbb{R}$ *(oder* $a_n \in \mathbb{C}$*), eine reelle (komplexe) Folge. Dann heißt die Folge* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, *definiert durch*

$s_n \to s$

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}_0,$$

$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = s$

eine Reihe *in* $\mathbb{R}$ *(bzw. in* $\mathbb{C}$*). Die Folgeglieder* s_n *der Reihe* (s_n) *werden als* Partialsummen *bezeichnet. Falls die Folge* (s_n) *der Partialsummen konvergiert, d.h. die Reihe konvergiert, mit einem Grenzwert* s, *d.h.* $s_n \to s$ $(n \to \infty)$, *so schreibt man*

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

$a_k = \frac{1}{k+1}$

$a_0 = 1 = s_0$

für den Grenzwert *der Reihe* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

$s_1 = a_0 + a_1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2}$

$s_2 = a_0 + a_1 + a_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} 1/_{k+1} = s_n$

 $\lim s_n = ?$

Einige Konvergenzkriterien für Reihen. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = S$

Satz (Unmittelbare Konvergenzkriterien für Reihen): $|s_m - s_{n-1}| < \varepsilon \quad \forall m, n-1 \geq N$

(a) Es gilt das Cauchysche Konvergenzkriterium $\left|\sum_{k=0}^{m} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k\right| < \varepsilon$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k}\ \textit{konvergent} \iff \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N : m, n \geq N : \left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon$$

(b) Es gilt die notwendige Bedingung $m = n: \quad \underbrace{|s_n - s_{n-1}|}_{|a_n|} \to 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\ \textit{konvergent} \implies \underline{\lim_{k\to\infty} a_k = 0}$$

Beweis:

- Teil (a) folgt unmittelbar aus dem Cauchy-Kriterium für Folgen.
- Teil (b) folgt aus Teil (a) für den Spezialfall $m = n$. ■

Satz (Weitere unmittelbare Konvergenzkriterien für Reihen):

(c) *Seien* $\sum a_k$, $\sum b_k$ *konvergente Reihen. Dann konvergieren die Reihen* $\sum(a_k + b_k)$ *und* $\sum(\lambda a_k)$, *und es gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

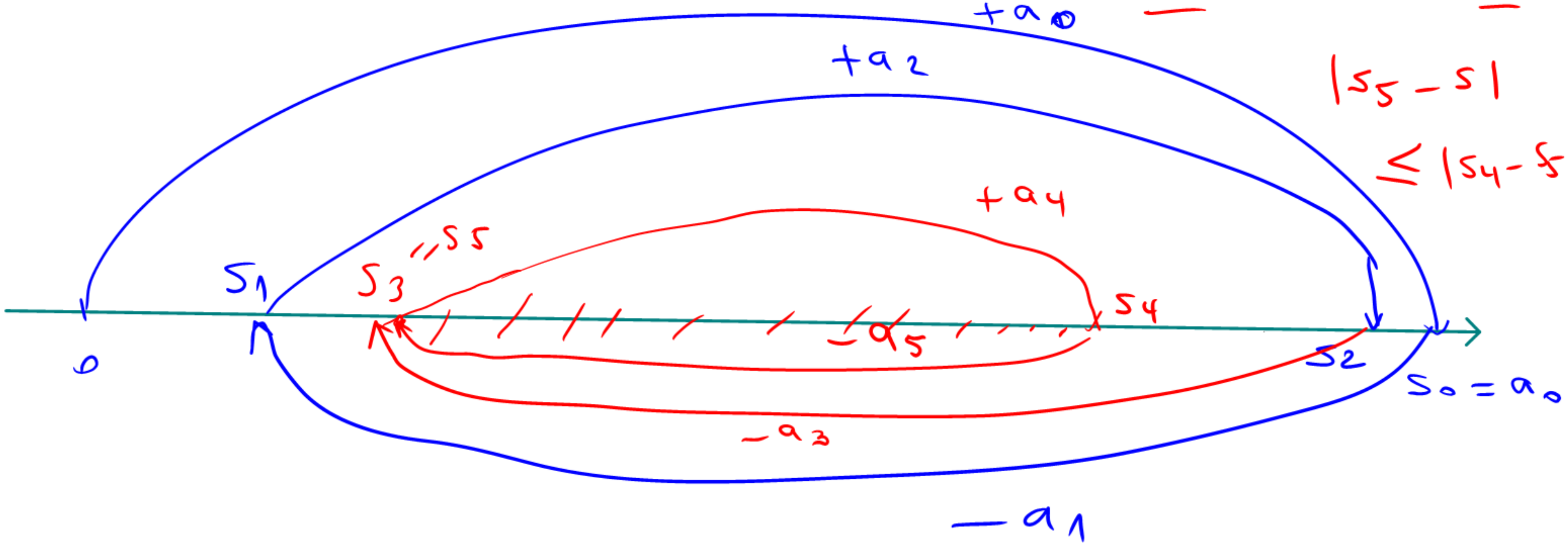
$$\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

(d) *Es gilt das* Leibnizsches Konvergenzkriterium*: Eine* alternierende Reihe *der Form* $\sum(-1)^k a_k$, $a_k \geq 0$, *deren (nicht-negativen) Folgeglieder* a_k *eine monoton fallende Nullfolge bilden, konvergiert, und es gilt*

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k a_k}_{S_{2n-1}} \leq \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k}_{a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \ldots} \leq \underbrace{\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k}_{S_{2n}}$$

$$s_5 \leq s \leq s_4$$

$$|s_5 - s| \leq |s_4 - s|$$



Bsp:

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad |x| < 1$$

Beweis: Teil (c) folgt direkt aus der Linearität der Grenzwertbildung für Folgen.

Zu Teil (d): Für die Reihen

$$u_n := \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k a_k \quad \text{und} \quad v_n := \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k$$

gilt

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= u_n + (a_{2n} - a_{2n+1}) \geq u_n \\
v_{n+1} &= v_n - (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \leq v_n \\
v_n &= u_n + a_{2n} \geq u_n \\
v_n - u_n &= a_{2n} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

Somit bilden die Folgen (u_n), (v_n) eine Intervallschachtelung, konvergieren gegen einen gemeinsamen Grenzwert, und es gilt

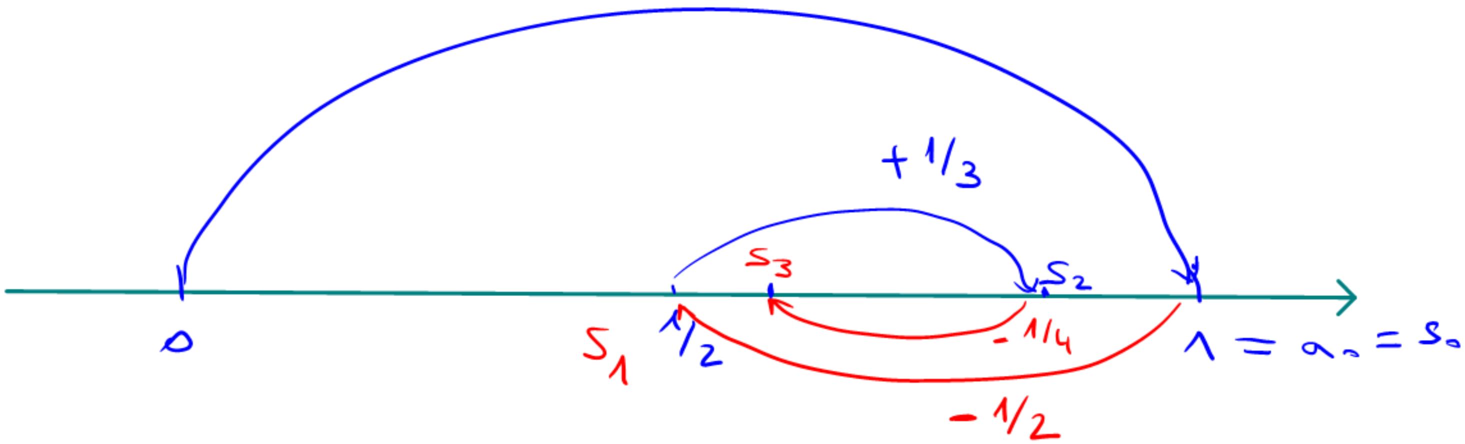
$$u_n \leq \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \leq v_n. \qquad \blacksquare$$

Bsp: Alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

$$a_k = \frac{1}{k+1} > 0 \qquad a_{k+1} = \frac{1}{k+2} < \frac{1}{k+1} = a_k$$

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0$$



$$s_3 \leq s \leq s_2$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \leq s \leq 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \iff \frac{7}{12} \leq s \leq 5/6$$

Die geometrische Reihe.

Beispiel: Für $x, y \in \mathbb{C}$ gilt

$$x^m - y^m = (x - y) \sum_{j=1}^{m} x^{m-j} y^{j-1}.$$

Insbesondere mit $m = n + 1$, $x = 1$ und $y = q \in \mathbb{C}$ gilt

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

für die Partialsummen der geometrischen Reihe $\sum q^k$. Daraus folgt, dass

- die geometrische Reihe für $|q| < 1$ konvergiert mit Grenzwert

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}$$

- die geometrische Reihe für $|q| > 1$ divergiert. ■

Die harmonische Reihe.

Beispiel: Die harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

divergiert, denn es gilt

$$\sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{m} = \frac{1}{m} \sum_{k=n}^{m} 1 = \frac{m-n+1}{m} \longrightarrow 1 \quad (m \to \infty)$$

und somit ist das Cauchy-Kriterium

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N : m, n \geq N : \left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon$$

für $\varepsilon < 1$ verletzt. ■