

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Prof. Dr. Armin Iske

Fachbereich Mathematik, Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg-Harburg
Wintersemester 2013/2014

Informationsquellen.

- **Internet**

www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a1/1314/

- **Vorlesung**

Donnerstag, 09:45–11:15, SBS 95-H, Audimax 1, ab 24.10.2013

Freitag, 14:15–15:45, SBS 95-H, Audimax 1, ab 25.10.2013

- **Übungen in Tutorgruppen**

Dr. Hanna Peywand Kiani und Übungsgruppenleiter(innen)

- **Anleitung zu den Übungen**

Dr. Hanna Peywand Kiani.

Mittwoch, 14:15–15:45, DE 22-I, Audimax 2, ab 30.10.2013

Freitag, 11:30–13:00, SBS 95-H, Audimax 1, ab 01.11.2013

- **Sprechstunde Prof. Iske**

Donnerstag, SBS 95-E 3.079, 11:30–12:30

Freitag, SBS 95-E 3.079, 16:00–17:00.

Literaturquellen.

PRIMÄR:

- R. Ansorge, H. J. Oberle: Mathematik für Ingenieure 1, 3. Auflage. WILEY-VCH, Berlin, 2000.
- H. J. Oberle, K. Rothe, Th. Sonar: Mathematik für Ingenieure, Band 3: Aufgaben und Lösungen. WILEY-VCH, Berlin, 2000.

SEKUNDÄR:

- K. Meyberg, P. Vachenauer: Höhere Mathematik, Bände 1 und 2. Springer, Berlin.
- K. Burg, H. Haf, F. Wille: Höhere Mathematik für Ingenieure, Band 1: Analysis. B.G. Teubner, Stuttgart, 1992.

Inhalte Analysis I.

- Aussagen, Logik und Mengen.
- Zahlensysteme, Relationen und Funktionen.
- Folgen, Reihen und Konvergenz.
- Vektorräume und Normen.
- Stetige und gleichmäßig stetige Funktionen.
- Differenzierbarkeit und Differentiationsregeln.
- Mittelwertsätze, lokale Extrema, Satz von Taylor.
- Regel von de l'Hospital, Kurvendiskussion.
- Fehlerrechnung, Iterationsmethoden und Banachscher Fixpunktsatz.

1 Aussagen, Mengen, Funktionen

1.1 Aussagen

Definition: *Eine Aussage ist eine sprachliche Konstruktion, von der man eindeutig entscheiden kann, ob sie **WAHR** oder **FALSCH** ist.*

Beispiele für Aussagen und keine Aussagen:

- Heute ist Donnerstag.
- Jede Primzahl ist ungerade.
- 2 ist eine Primzahl.
- Studieren macht Spaß . . . ganz besonders an der TUHH.
- Die TUHH ist Deutschlands jüngste Technische Universität.
- Der HSV steigt nie ab.

Charakteristische Eigenschaft: Aussagen sind entweder **WAHR** oder **FALSCH**.

Wahrheitswerte von Aussagen. Sei A eine Aussage. Dann kann man A einen eindeutigen *Wahrheitswert* $w(A)$ zuordnen.

$$w(A) = 0 \iff A \text{ ist falsch;}$$

$$w(A) = 1 \iff A \text{ ist wahr.}$$

Verknüpfungen von Aussagen. Seien A und B Aussagen.

$\neg A$: Negation “nicht A ”

$A \wedge B$: Konjunktion “ A und B ”

$A \vee B$: Disjunktion “ A oder B ”

$A \Rightarrow B$: Implikation “aus A folgt B ”

$A \Leftrightarrow B$: Äquivalenz “ A ist äquivalent zu B ”

Wahrheitstafeln.

$w(A)$	$w(B)$	$w(\neg A)$	$w(A \wedge B)$	$w(A \vee B)$	$w(A \Rightarrow B)$	$w(A \Leftrightarrow B)$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Bemerkung: Eine Implikation ist wahr, wenn die *Prämisse* falsch ist. Es gilt

$$A \Rightarrow B \quad \Leftrightarrow \quad \neg A \vee B$$

Definition:

- Eine Verknüpfung von Aussagen, die für sämtliche Kombinationen von Wahrheitswerten stets eine WAHRE Aussage ergeben, heißt **Tautologie**.
- Eine Verknüpfung von Aussagen, die für sämtliche Kombinationen von Wahrheitswerten stets eine FALSCHER Aussage ergeben, heißt **Kontradiktion**.

Beispiel für eine Tautologie.

$$(A \Rightarrow B) \iff (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Betrachte zum Nachweis die folgende Wahrheitstafel.

$w(A)$	$w(B)$	$w(A \Rightarrow B)$	$w(\neg B)$	$w(\neg A)$	$w(\neg B \Rightarrow \neg A)$
1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

$w(A)$	$w(B)$	$w(A \Rightarrow B)$	$w(\neg B \Rightarrow \neg A)$	$(A \Rightarrow B) \iff (\neg B \Rightarrow \neg A)$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Beispiel für eine Tautologie.

$$\left((A \Rightarrow B) \wedge \neg B \right) \Rightarrow \neg A$$

Betrachte zum Nachweis die folgende Wahrheitstafel.

$w(A)$	$w(B)$	$w(A \Rightarrow B)$	$w(\neg B)$	$w((A \Rightarrow B) \wedge \neg B)$
1	1	1	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

$w(A)$	$w(B)$	$w((A \Rightarrow B) \wedge \neg B)$	$w(\neg A)$	$w(((A \Rightarrow B) \wedge \neg B) \Rightarrow \neg A)$
1	1	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	0	1	1
0	0	1	1	1

Häufig verwendete Tautologien.

(1)	$A \vee \neg A$	<i>tertium non datur</i>
(2)	$\neg(A \wedge \neg A)$	<i>Widerspruch</i>
(3)	$\neg\neg A \iff A$	<i>doppelte Verneinung</i>
(4)	$\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg B$	<i>de Morgan</i>
(5)	$\neg(A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B$	<i>de Morgan</i>
(6)	$(A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A)$	<i>Kontraposition</i>
(7)	$(A \implies B) \wedge A \implies B$	<i>modus ponens</i>
(8)	$(A \implies B) \wedge \neg B \implies \neg A$	<i>modus tollens</i>
(9)	$(A \implies B) \wedge (B \implies C) \implies (A \implies C)$	<i>modus barbara</i>
(10)	$A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	<i>Distributivgesetz</i>
(11)	$A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	<i>Distributivgesetz</i>

Aussageformen.

Definition: Eine Aussage, die von Variablen abhängt, heißt **Aussageform**.

Beispiele für Aussageformen.

- x ist eine gerade Zahl;
- x ist größer als y ;
- x ist größer als y , und y ist größer als z .

Beachte: Wahrheitswerte von Aussageformen erhält man nur durch Einsetzen von Werten für die einzelnen Variablen.

Beispiel: Definiere Aussageform $A(x, y)$ durch

$$A(x, y) \iff x^2 + y^2 < 2$$

Dann gilt:

- $A(1/2, 1)$ ist wahr, d.h. $w(A(1/2, 1)) = 1$;
- $A(-3, 2)$ ist falsch, d.h. $w(A(-3, 2)) = 0$.

Quantoren.

Mathematische Aussagen werden häufig durch Kombination von Aussageformen mit *Quantoren* formuliert.

Es gibt zwei Grundquantoren:

- \forall **Allquantor**;
- \exists **Existenzquantor**;

und weiterhin

- \exists_1 **Existenz mit Eindeutigkeit**.

Sei $A(x)$ eine Aussageform. Dann definieren wir neue Aussagen wie folgt.

- $\forall x : A(x)$, d.h. für alle x gilt $A(x)$;
- $\exists x : A(x)$, d.h. es gibt *mindestens* ein x , für das $A(x)$ gilt;
- $\exists_1 x : A(x)$, d.h. es gibt *genau* ein x , für das $A(x)$ gilt.

Quantoren.

Die Wahrheitswerte der einzelnen Aussagen werden entsprechend definiert:

$$w(\forall x : A(x)) = 1 \iff \text{für alle } x \text{ ist } w(A(x)) = 1$$

$$w(\exists x : A(x)) = 1 \iff \text{es gibt } \textit{mindestens} \text{ ein } x, \text{ so dass } w(A(x)) = 1$$

$$w(\exists_1 x : A(x)) = 1 \iff \text{es gibt } \textit{genau} \text{ ein } x, \text{ so dass } w(A(x)) = 1$$

Negation von Quantoren.

Es gilt

$$\neg(\forall x : A(x)) \iff \exists x : (\neg A(x))$$

$$\neg(\exists x : A(x)) \iff \forall x : (\neg A(x))$$

Mathematische Sätze und Beweistechniken.

Standardform eines Satzes:

$$A \implies B, \quad \text{für Aussagen } A, B,$$

wobei A Voraussetzung (**Prämisse**) und B Behauptung (**Konklusion**) heißt.

Mögliche Beweistechniken:

- **Direkter Beweis** (**Kettenschluss**)

$$A = A_0 \implies A_1 \implies A_2 \implies \dots \implies A_n = B$$

- **Indirekter Beweis** (Kontraposition, **Widerspruch**)

$$A \implies B \quad \iff \quad \neg B \implies \neg A$$

ist eine Tautologie.

Exemplarisches Beispiel für einen ersten Beweis.

Satz: Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist genau dann gerade, wenn ihr Quadrat n^2 gerade ist, d.h. für $n \in \mathbb{N}$ gilt die Äquivalenz

$$n \text{ gerade} \iff n^2 \text{ gerade.}$$

Beweis: Führe den Beweis in zwei Schritten:

1. Schritt: Zeige die Implikation

$$n \text{ gerade} \implies n^2 \text{ gerade.}$$

2. Schritt: Zeige die Implikation

$$n^2 \text{ gerade} \implies n \text{ gerade.}$$

1. Schritt: Direkter Beweis.

Sei n gerade. Dann $\exists k \in \mathbb{N} : n = 2k$

$$n = 2k \implies n^2 = 4k^2 = 2(2k^2) \implies n^2 \text{ gerade.}$$

2. Schritt: Indirekter Beweis. (zeige $\neg B \Rightarrow \neg A$ statt $A \Rightarrow B$)

Sei n^2 gerade. Angenommen n ist ungerade. Dann $\exists k \in \mathbb{N} : n = 2k - 1$.

$$\begin{aligned} n = 2k - 1 &\implies n^2 = (2k - 1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 2(2k^2 - 2k) + 1 \\ &\implies n^2 \text{ ungerade.} \end{aligned}$$

Dies ist aber ein *Widerspruch* zur Annahme (n^2 gerade). ■

Ein weiteres exemplarisches Beweisbeispiel.

Satz: Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational, d.h. $\sqrt{2}$ läßt sich **nicht** als Bruch $\sqrt{2} = n/m$ mit natürlichen Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ darstellen.

Beweis (durch Widerspruch) : Annahme: $\exists n, m \in \mathbb{N} : \sqrt{2} = \frac{n}{m}$.

Wir dürfen ohne Einschränkung annehmen, dass n und m teilerfremd sind.

Denn ansonsten teilen wir m, n durch deren größten gemeinsamen Teiler (ggT).

Dann gilt:

$$2m^2 = n^2 \implies n^2 \text{ gerade} \implies \mathbf{n \text{ gerade}} \implies \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k.$$

Einsetzen in $2m^2 = n^2$ ergibt:

$$2m^2 = n^2 = (2k)^2 = 4k^2 \implies m^2 = 2k^2 \implies m^2 \text{ gerade} \implies \mathbf{m \text{ gerade}}.$$

Dies ist ein **Widerspruch** zur Annahme, dass n und m teilerfremd sind.

Die Annahme $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ ist somit **falsch** $\implies \sqrt{2}$ ist irrational. ■

1.2 Mengen

Definition: Eine *Menge* ist eine Kollektion von paarweise verschiedenen Objekten. Die einzelnen Objekte werden *Elemente* der Menge genannt.

Beispiele für Mengen.

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ Menge der natürlichen Zahlen;
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ Menge der nicht-negativen ganzen Zahlen;
- Studierende der TUHH;
- Hörer der Analysis I im WS 2013/2014;
- Menge der Primzahlen.

Notationen: Sei M eine Menge.

$$a \in M \iff a \text{ ist ein Element der Menge } M$$

$$a \notin M \iff \neg(a \in M)$$

Definition von Mengen.

- Aufzählung der Elemente: $M := \{1, 2, 3, 4\}$
- Charakterisierende Eigenschaft der Menge, $M := \{x \in \Omega \mid A(x)\}$

Bedeutung der verwendeten Symbole.

$:=$ “wird definiert durch”

$A(x)$ Aussageform, definiert für Elemente x aus dem Grundbereich Ω

Teilmengen von Mengen.

$$M \subset N \quad \iff \quad \forall x : (x \in M \implies x \in N)$$

Gleichheit von Mengen.

$$M = N \quad \iff \quad \forall x : (x \in M \iff x \in N)$$

Die leere Menge. Menge, die kein Element enthält. Bezeichnung: \emptyset

Ordnungseigenschaften.

- $M \subset M$;
- $(M \subset N) \wedge (N \subset M) \implies M = N$;
- $(M \subset N) \wedge (N \subset P) \implies M \subset P$.

Verknüpfung von Mengen.

$M \cup N$	$:= \{x \mid x \in M \vee x \in N\}$	(Vereinigung)
$M \cap N$	$:= \{x \mid x \in M \wedge x \in N\}$	(Durchschnitt)
$M \setminus N$	$:= \{x \mid x \in M \wedge x \notin N\}$	(Differenz)
$M \times N$	$:= \{(a, b) \mid a \in M \wedge b \in N\}$	(Cartesisches Produkt)
$\mathcal{P}(M)$	$:= \{X \mid X \subset M\}$	(Potenzmenge)

Bemerkungen und weitere Bezeichnungen.

- Gilt $M \cap N = \emptyset$, so nennt man M und N **disjunkt**.
- Verknüpfung von endlich vielen Mengen.

$$\bigcup_{k=1}^n A_k = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$
$$:= \{a \mid \exists i \in \{1, \dots, n\} : a \in A_i\}$$

$$\bigcap_{k=1}^n A_k = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$
$$:= \{a \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} : a \in A_i\}$$

$$\prod_{k=1}^n A_k = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$$
$$:= \{(a_1, \dots, a_n) \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} : a_i \in A_i\}$$

Weitere Bemerkungen und Bezeichnungen.

- Für geordnete Paare bzw. n -Tupel gilt:

$$(a_1, a_2) = (b_1, b_2) \iff a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2$$

$$(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n) \iff \forall i \in \{1, \dots, n\} : x_i = y_i$$

- Wichtige Cartesische Produkte:

- die **Euklidische Ebene**

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

- der **dreidimensionale Euklidische Raum**

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

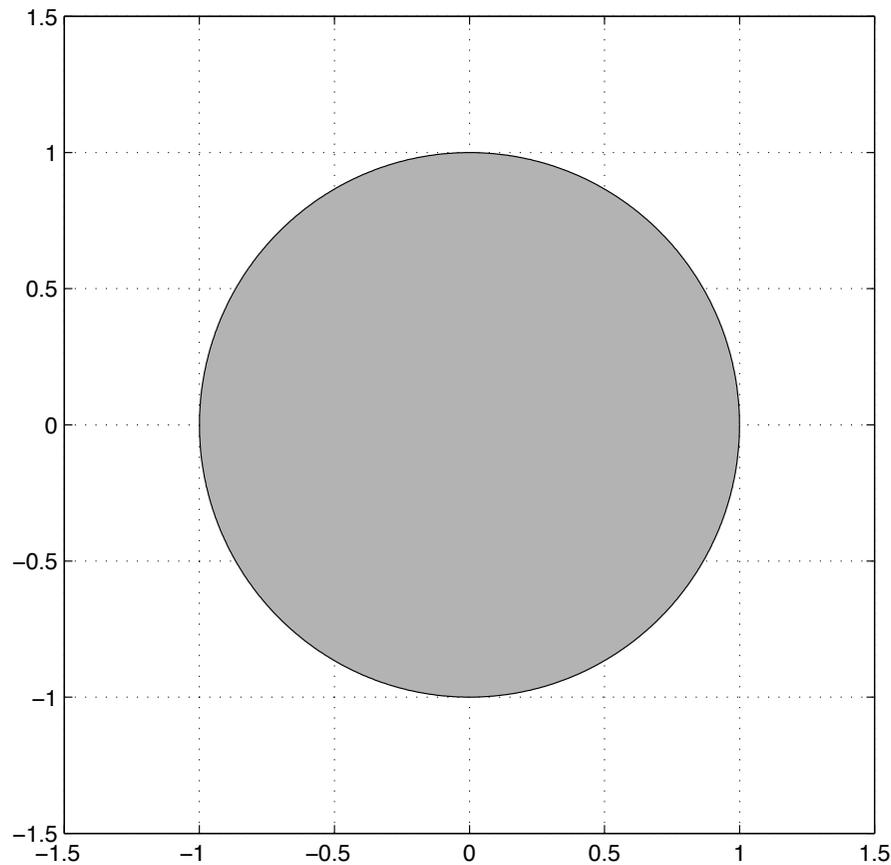
- der **n -dimensionale Euklidische Raum**

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n\text{-fach}} = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$

Der Einheitskreis.

- Kreisscheibe mit Radius 1 (**Einheitskreis**)

$$A := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \right\}$$



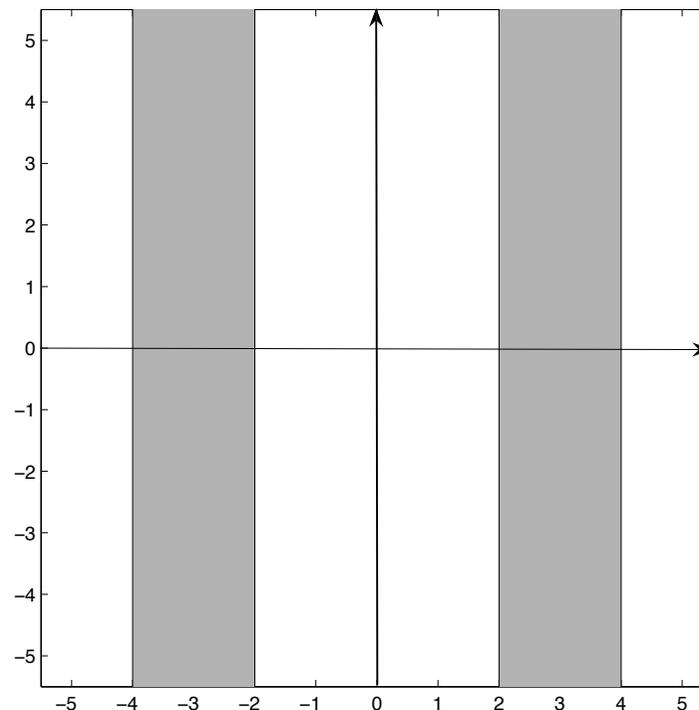
Zwei Streifen. $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 5 \leq x^2 + 1 \leq 17\}$

Beachte:

$$5 \leq x^2 + 1 \leq 17 \iff 4 \leq x^2 \leq 16 \iff -4 \leq x \leq -2 \vee 2 \leq x \leq 4$$

und somit gilt

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -4 \leq x \leq -2 \vee 2 \leq x \leq 4\}.$$



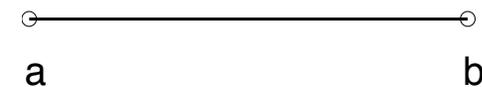
Intervalle in \mathbb{R} .

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

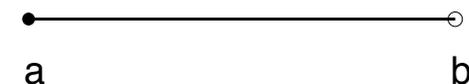
$[a, b] := \{x \mid a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall



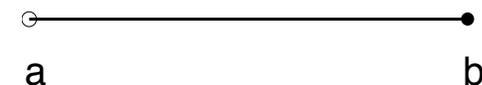
$(a, b) := \{x \mid a < x < b\}$ offenes Intervall



$[a, b) := \{x \mid a \leq x < b\}$ halboffenes Intervall



$(a, b] := \{x \mid a < x \leq b\}$ halboffenes Intervall



1.3 Funktionen

Definition: Seien M und N Mengen. Unter einer **Funktion** (oder **Abbildung**) von M in N verstehen wir eine Vorschrift, die jedem Element $x \in M$ genau ein Element $y \in N$ zuordnet.

Notationen und Bezeichnungen.

- $f : M \rightarrow N$, $y = f(x)$ bzw. $x \mapsto f(x)$ für alle $x \in M$. Somit gilt:

$$f : M \rightarrow N \quad \iff \quad \forall x \in M : \exists_1 y \in N : y = f(x).$$

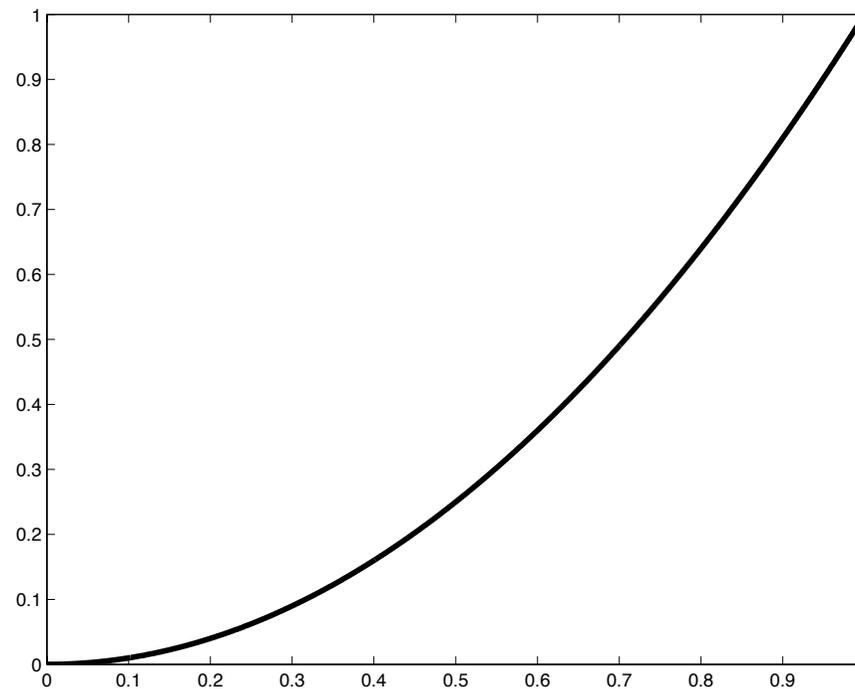
- M heißt **Definitionsbereich** (oder **Urbildbereich**) von f ;
- N heißt **Zielmeng**e (oder **Bildbereich**) von f ;
- Die Menge

$$\text{graph}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in M\} \subset M \times N$$

heißt **Graph** der Funktion f .

Beispiel.

- Funktion $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, definiert durch $f(x) = x^2$
- $M = [0, 1]$ Definitionsbereich;
- $N = [0, 1]$ Zielmenge.



Graph von $f(x) = x^2$.

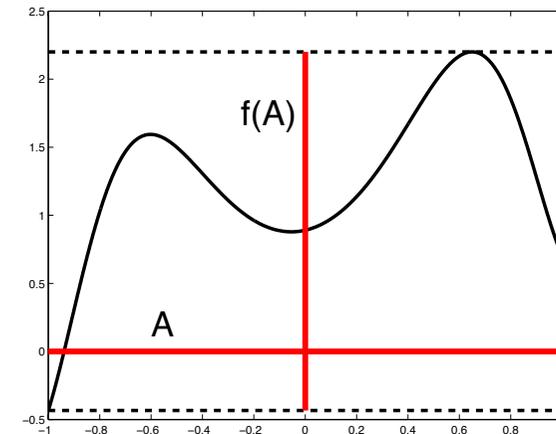
Weitere Notationen und Bezeichnungen.

Sei $f : M \rightarrow N$ eine Funktion.

- Zu $A \subset M$ heißt die Menge

$$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\} \subset N$$

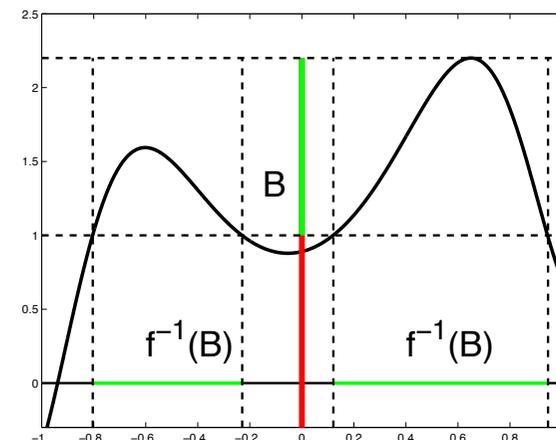
das **Bild** von A unter der Funktion f .



- Zu $B \subset N$ heißt die Menge

$$f^{-1}(B) = \{a \in M \mid f(a) \in B\} \subset M$$

das **Urbild** von B unter der Funktion f .



Surjektive, injektive und bijektive Funktionen.

Definition. Sei $f : M \rightarrow N$ eine Funktion.

Dann heißt f **surjektiv**, falls die Gleichung $f(x) = y$ für jedes $y \in N$ mindestens eine Lösung $x \in M$ besitzt, d.h.

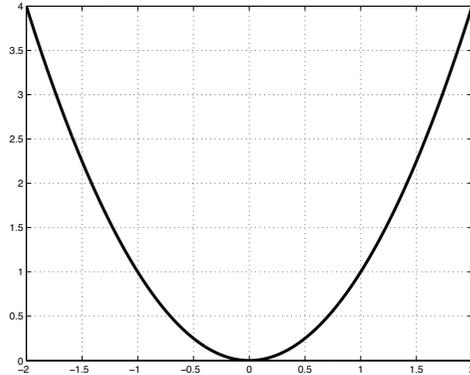
$$\forall y \in N \quad \exists x \in M : y = f(x).$$

Weiterhin heißt f **injektiv**, falls die Gleichung $f(x) = y$ für $y \in N$ höchstens eine Lösung $x \in M$ besitzt, d.h.

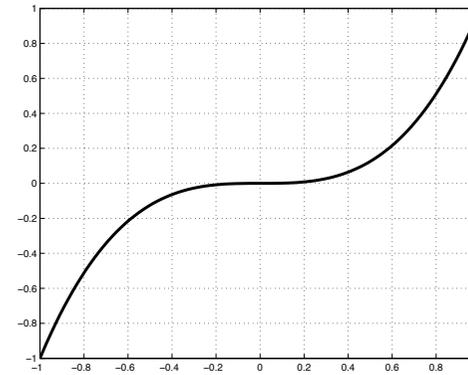
$$\forall x_1, x_2 \in M : f(x_1) = f(x_2) \quad \implies \quad x_1 = x_2.$$

Schließlich heißt f **bijektiv**, falls f injektiv und surjektiv ist. □

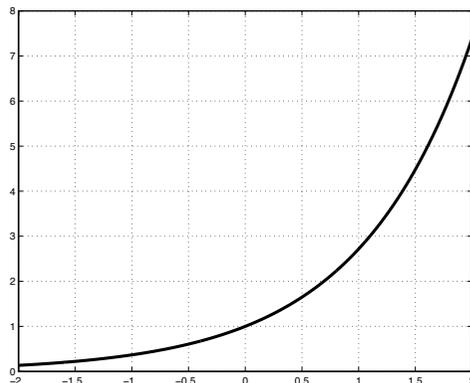
Beispiele.



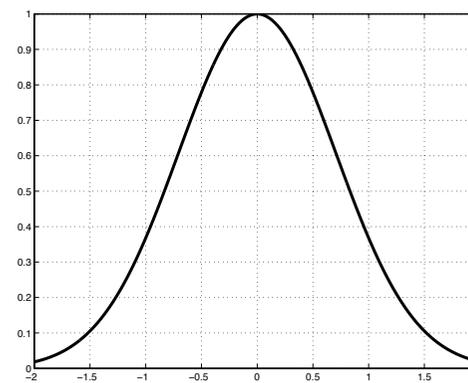
$f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), f(x) = x^2$
surjektiv, nicht injektiv.



$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$
bijektiv.



$f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), f(x) = \exp(x)$
injektiv, nicht surjektiv.



$f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), f(x) = \exp(-x^2)$
weder injektiv noch surjektiv.

Bemerkungen.

- Eine injektive Funktion $f : M \rightarrow N$ lässt sich *invertieren*, denn zu jedem $y \in f(M)$ existiert *genau ein* $x \in M$ mit $y = f(x)$.
- Für eine injektive Funktion $f : M \rightarrow N$ wird deren **Umkehrfunktion** $f^{-1} : f(M) \rightarrow M$ definiert durch

$$f^{-1}(y) = x \quad \text{für } y \in f(M), \text{ wobei } f(x) = y.$$

- Falls $f : M \rightarrow N$ bijektiv ist, so gilt $f(M) = N$ und $f^{-1}(N) = M$, d.h.

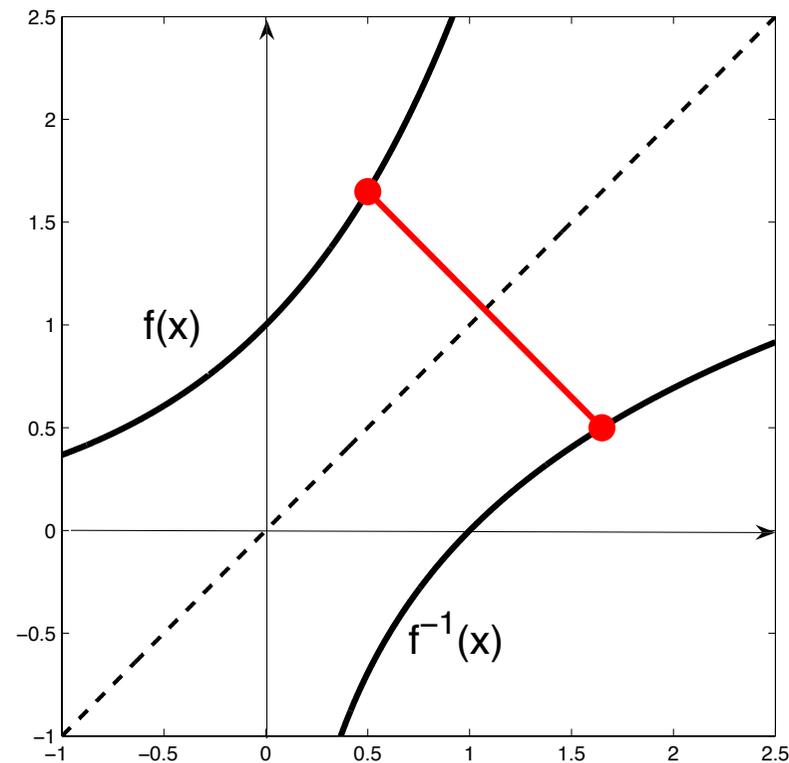
$$M \xrightarrow{f} N \quad \text{und} \quad N \xrightarrow{f^{-1}} M.$$

Beispiel.

- $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, definiert durch $f(x) = x^2$.
- $f^{-1} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mit $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.
- Dann: $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2) = \sqrt{x^2} = x$ für alle $x \in [0, 1]$.
- Ebenso: $f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$ für alle $x \in [0, 1]$.

Bemerkung und Beispiel.

Sei $f : M \rightarrow N$ eine reellwertige injektive Funktion einer reellen Variablen, d.h. $M, N \subset \mathbb{R}$. Dann erhält man den Graphen der Umkehrfunktion f^{-1} aus dem Graphen von f durch Spiegelung an der Diagonalen $x = y$.



Konstruktion der Umkehrfunktion.

Komposition von Funktionen.

Definition: Seien $f : M \rightarrow N$ und $g : N \rightarrow P$ Funktionen. Dann ist die **Komposition** $g \circ f$ von f und g eine Funktion, definiert durch

$$g \circ f : M \rightarrow P \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad \text{für } x \in M.$$

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$$

$$M \xrightarrow{g \circ f} P$$

Eigenschaften von Kompositionen.

- **Assoziativität.** Für Funktionen $f : M \rightarrow N, g : N \rightarrow P, h : P \rightarrow Q$ gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

- Kompositionen sind im Allgemeinen **nicht** kommutativ, d.h.

$$g \circ f \neq f \circ g.$$

Gegenbeispiel: Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, definiert durch

$$f(x) = x^2 + 2x,$$

$$g(x) = x + 1.$$

Dann folgt

$$(g \circ f)(x) = g(x^2 + 2x) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2,$$

$$(f \circ g)(x) = f(x + 1) = (x + 1)^2 + 2(x + 1) = x^2 + 4x + 3,$$

und somit gilt $g \circ f \neq f \circ g$.

Die symmetrische Gruppe.

Definition: Sei M eine nichtleere Menge. Dann heißt die Menge

$$S(M) = \{f : M \rightarrow M \mid f \text{ bijektiv} \}$$

die **symmetrische Gruppe** von M . Die symmetrische Gruppe $S(M)$ enthält die **Identität** $\text{id}_M : M \rightarrow M$, definiert durch $\text{id}_M(x) = x$ für alle $x \in M$. \square

Die symmetrische Gruppe $S(M)$ von M erfüllt die **Gruppenaxiome**.

(G1) Es gilt das Assoziativgesetz

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \quad \text{für alle } f, g, h \in S(M).$$

(G2) Die Identität id_M ist das neutrale Element in $S(M)$, d.h. es gilt

$$f \circ \text{id}_M = \text{id}_M \circ f = f \quad \text{für alle } f \in S(M).$$

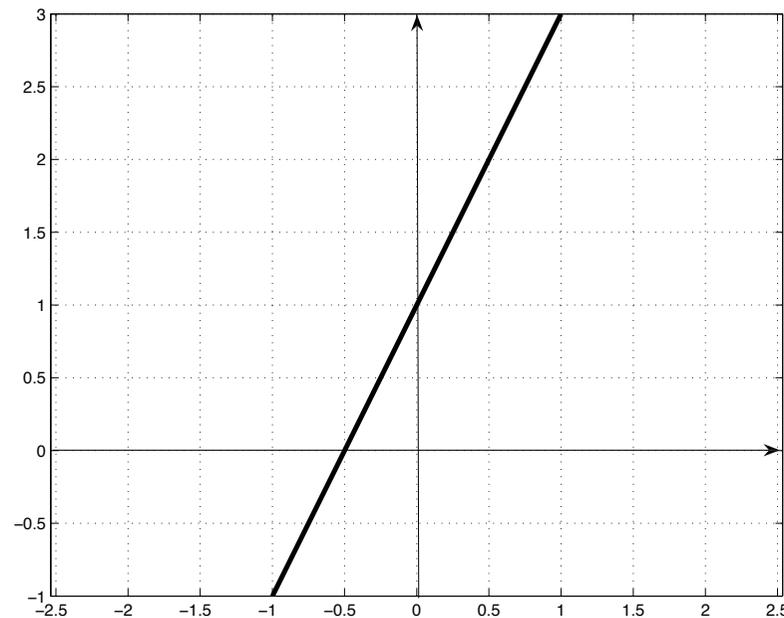
(G3) Jede Funktion $f \in S(M)$ besitzt ein Inverses $f^{-1} \in S(M)$ mit

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{id}_M \quad \text{für alle } f \in S(M).$$

Elementare reelle Funktionen.

- **Affin-lineare Funktionen:**

$$f(x) = a_1x + a_0 \quad \text{für } a_0, a_1 \in \mathbb{R}.$$

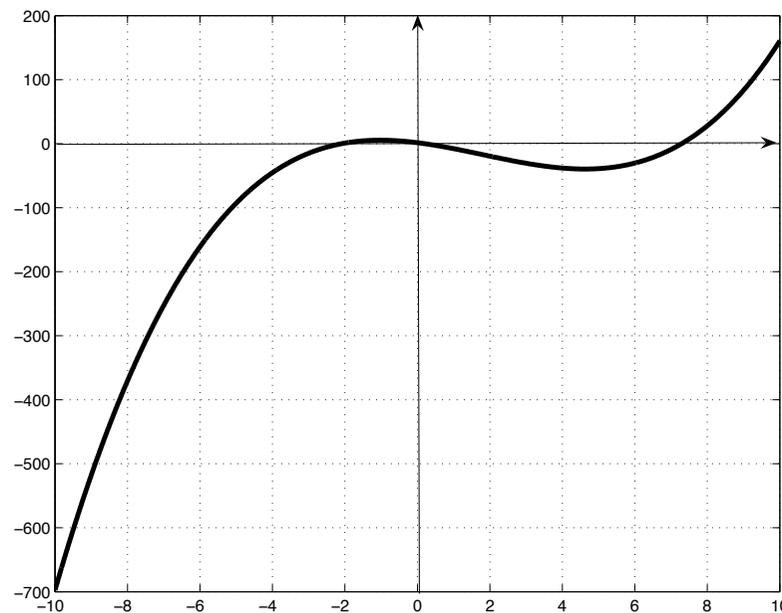


Die affin-lineare Funktion

$$f(x) = 2x + 1.$$

- **Polynome:**

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \text{für } a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \text{ mit } a_n \neq 0.$$



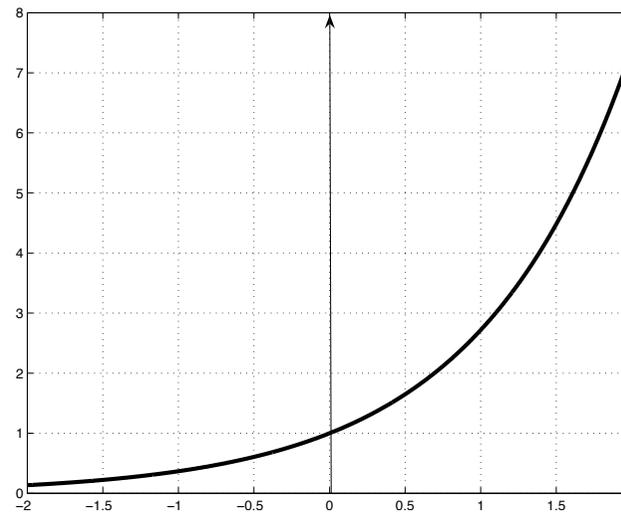
Das kubische Polynom

$$f(x) = 0.5x^3 - 2.7x^2 - 7.1x + 1.5.$$

- **Die Exponentialfunktion:** $f(x) = a^x$ für **Basis** $a > 0$.

Spezialfall: Basis e , wobei die **Eulersche Zahl** e definiert ist durch

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2.7182818284590452353 \dots$$



Die Exponentialfunktion $f(x) = \exp(x) = e^x$.

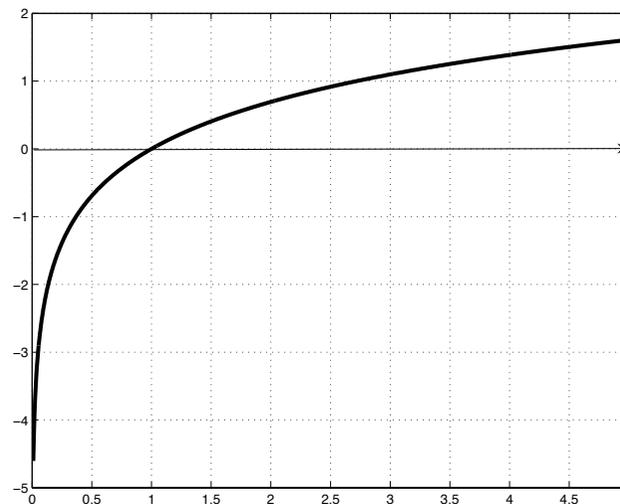
Es gilt die *Funktionalgleichung*

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

- **Der Logarithmus**, Umkehrfunktion der (injektiven) Exponentialfunktion,

$$f(x) = \log_a(x) : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{für Basis } a > 0.$$

Spezialfall: Basis e , $\log(x) = \log_e(x)$, der **natürliche Logarithmus**.



Der natürliche Logarithmus $f(x) = \log(x)$.

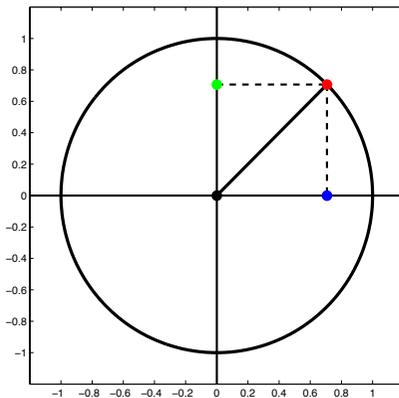
Es gilt die *Funktionalgleichung*

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y) \quad \text{für alle } x, y > 0.$$

Trigonometrische Funktionen.

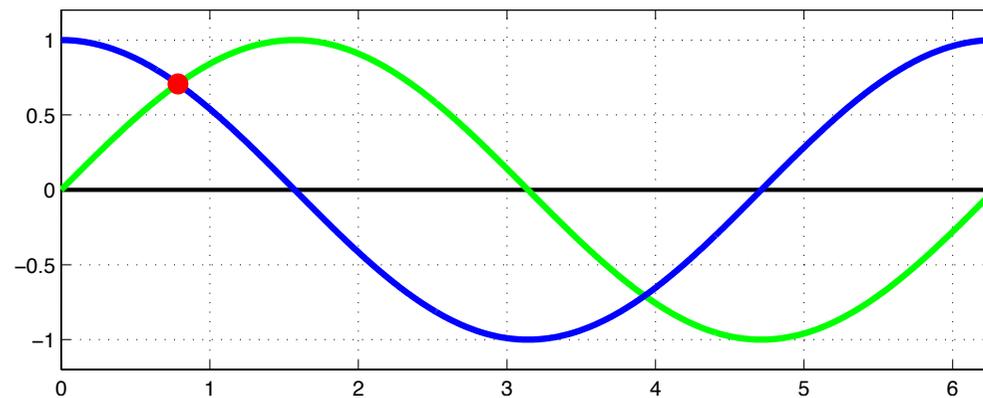
$$\sin : [0, 2\pi) \rightarrow [-1, 1] \quad (\text{Sinus})$$

$$\cos : [0, 2\pi) \rightarrow [-1, 1] \quad (\text{Cosinus})$$



Der Einheitskreis.

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$



$$\sin : [0, 2\pi) \rightarrow [-1, 1];$$

$$\cos : [0, 2\pi) \rightarrow [-1, 1].$$

Eigenschaften trigonometrischer Funktionen.

- Für alle $\varphi \in [0, 2\pi)$ gilt

$$\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1.$$

- **Symmetrie:**

$$\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in [0, 2\pi)$$

$$\cos(-\varphi) = \cos(\varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in [0, 2\pi)$$

- **Periodizität:**

$$\sin(\varphi) = \sin(\varphi + 2\pi)$$

$$\cos(\varphi) = \cos(\varphi + 2\pi)$$

somit sind Sinus und Cosinus auf ganz \mathbb{R} definiert,

$$\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1] \quad \text{und} \quad \cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1].$$

Weitere Eigenschaften trigonometrischer Funktionen.

- Wertetafel:

φ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin \varphi$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos \varphi$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0

- **Additionstheoreme:** Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

2 Zahlenbereiche

2.1 Natürliche Zahlen

Die Menge

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

der **natürlichen Zahlen** wird formal durch die **Peano-Axiome** definiert:

(A1) $1 \in \mathbb{N}$;

(A2) $n \in \mathbb{N} \implies n + 1 \in \mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}$;

(A3) $n \neq m \implies n + 1 \neq m + 1$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$;

(A4) $n \in \mathbb{N} \implies n + 1 \neq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$;

(A5) Für $A \subset \mathbb{N}$ gilt das **Vollständigkeitsaxiom**:

$$1 \in A \wedge (\forall n : [n \in A \implies (n + 1) \in A]) \implies A = \mathbb{N}.$$

Bemerkung: Die *Nachfolgeabbildung* $n \mapsto n + 1$ ist injektiv.

Beweisprinzip der vollständigen Induktion.

Dabei ist die Gültigkeit einer Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zu beweisen, d.h. es ist zu zeigen

$$\forall n \in \mathbb{N} : A(n),$$

wobei $A(n)$ eine Aussageform ist, die von $n \in \mathbb{N}$ abhängt.

Beweisschritte der vollständigen Induktion.

(I1) Induktionsanfang: $n = 1$

Zeige $A(1)$;

(I2) Induktionsannahme:

Es gelte $A(n)$;

(I3) Induktionsschluss: $n \rightarrow n + 1$

Zeige die Implikation $A(n) \implies A(n + 1)$.

Falls Schritte **(I1)**-**(I3)** durchführbar, so gilt die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 1.

Bestimme die Anzahl t_n der Teilmengen einer n -elementigen Menge

$$A_n = \{a_1, \dots, a_n\}.$$

Vorgehen: Betrachte zunächst kleine $n \in \mathbb{N}$, z.B. $n = 1, 2, 3$.

- $n = 1$: Die Menge $A_1 = \{a_1\}$ besitzt nur die Teilmengen $\emptyset, \{a_1\}$.
Somit $t_1 = 2$.
- $n = 2$: Die Menge $A_2 = \{a_1, a_2\}$ besitzt die vier Teilmengen

$$\emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_1, a_2\},$$

und somit gilt $t_2 = 4$.

- $n = 3$: Die Menge $A_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$ besitzt $t_3 = 8$ Teilmengen.

Vermutung: Es gilt $t_n = 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz: Eine n -elementige Menge $A_n = \{a_1, \dots, a_n\}$ besitzt $t_n = 2^n$ Teilmengen.

Beweis: durch vollständige Induktion über n .

- Induktionsanfang ($n = 1$): Es gilt $t_1 = 2 = 2^1$.
- Induktionsannahme: Es gelte $t_n = 2^n$ für $n \in \mathbb{N}$.
- Induktionsschluss ($n \rightarrow n + 1$):

Zu zeigen: $A_{n+1} = \{a_1, \dots, a_n, a_{n+1}\}$ hat $t_{n+1} = 2^{n+1}$ Teilmengen.

Schreibe $\mathcal{P}(A) = K_1 \cup K_2$ für die Potenzmenge von A_{n+1} , wobei

$$T \in K_1 \quad \iff \quad a_{n+1} \notin T$$

$$T \in K_2 \quad \iff \quad a_{n+1} \in T$$

Nach Induktionsannahme besitzt K_1 genau $t_n = 2^n$ Elemente.

Ebenso besitzt K_2 nach Induktionsannahme $t_n = 2^n$ Elemente.

Weiterhin gilt $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ nach Konstruktion.

Somit hat $\mathcal{P}(A)$ insgesamt $t_{n+1} = t_n + t_n = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$ Elemente. ■

Beispiel 2.

Bestimme die Anzahl p_n der verschiedenen Anordnungen (**Permutationen**) für die Elemente einer n -elementigen Menge $A_n = \{1, \dots, n\}$.

Vorgehen: Betrachte zunächst kleine $n \in \mathbb{N}$, z.B. $n = 1, 2, 3$.

- $n = 1$: Das Element in $A_1 = \{1\}$ besitzt nur eine Anordnung, (1) .
Somit $p_1 = 1$.

- $n = 2$: Für die Elemente in $A_2 = \{1, 2\}$ gibt es zwei Anordnungen,
 $(1, 2), (2, 1)$.

Somit gilt $p_2 = 2$.

- $n = 3$: Für die Elemente in $A_3 = \{1, 2, 3\}$ gibt es sechs Anordnungen,
 $(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)$.

Somit gilt $p_3 = 6$.

Vermutung: Es gilt $p_n = n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz: Es gibt $p_n = n!$ Permutationen für das n -tupel $(1, 2, \dots, n)$.

Beweis: durch vollständige Induktion über n .

- Induktionsanfang ($n = 1$): Es gilt $p_1 = 1$.
- Induktionsannahme: Es gelte $p_n = n!$ für $n \in \mathbb{N}$.
- Induktionsschluss ($n \rightarrow n + 1$):

Es gibt nach Induktionsannahme je $n!$ Permutationen für die $(n + 1)$ -Tupel

$$\left\{ \begin{array}{l} (i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i_n, \mathbf{n+1}), \\ (i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, \mathbf{n+1}, i_n), \\ \vdots \\ (i_1, \mathbf{n+1}, i_2, \dots, i_{n-1}, i_n), \\ (\mathbf{n+1}, i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i_n) \end{array} \right\} \quad i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, n\} \text{ paarweise verschieden.}$$

und somit gilt $p_{n+1} = \underbrace{n! + \dots + n!}_{(n+1)\text{-fach}} = (n+1) \cdot n! = (n+1)!$ ■

Folgerung: Eine n -elementige Menge $\{a_1, \dots, a_n\}$ besitzt genau

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \quad \text{für } n, m \in \mathbb{N}_0 : 0 \leq m \leq n,$$

m -elementige Teilmengen. Dabei setzt man $0! = 1$.

Beweis: Es gibt $n!$ Permutationen von (a_1, \dots, a_n) , bezeichnet mit

$$(a_{i_1}, \dots, a_{i_n}), \quad \text{wobei } \{i_1, \dots, i_n\} = \{1, \dots, n\}.$$

Betrachte nun die ersten m Plätze in $(a_{i_1}, \dots, a_{i_n})$. Die $n!$ möglichen Permutationen

$$(a_{i_1}, \dots, a_{i_m}, a_{i_{m+1}}, \dots, a_{i_n})$$

von (a_1, \dots, a_n) führen genau $m!(n-m)!$ -mal auf die gleiche Teilmenge

$$\{a_{i_1}, \dots, a_{i_m}\} \subset \{a_1, \dots, a_n\},$$

denn die $m!$ Permutationen der ersten m Plätze und die $(n-m)!$

Permutationen der restlichen $n-m$ Plätze verändern $\{a_{i_1}, \dots, a_{i_m}\}$ nicht.

Somit gibt es $\frac{n!}{m!(n-m)!} = \binom{n}{m}$ m -elementige Teilmengen von $\{a_1, \dots, a_n\}$. ■

Einschub: Summen, Produkte und Potenzen.

Allgemeine Summen und Produkte.

$$\sum_{k=m}^n b_k := b_m + b_{m+1} + \cdots + b_n \quad (\text{falls } m \leq n)$$

$$\sum_{k=m}^n b_k := 0 \quad (\text{falls } m > n, \text{ leere Summe})$$

$$\prod_{k=m}^n b_k := b_m \cdot b_{m+1} \cdot \cdots \cdot b_n \quad (\text{falls } m \leq n)$$

$$\prod_{k=m}^n b_k := 1 \quad (\text{falls } m > n, \text{ leeres Produkt})$$

Einschub: Summen, Produkte und Potenzen.

Potenzen.

$$a^n := \begin{cases} \prod_{k=1}^n a & \text{für } n \geq 0 \\ 1/(a^{-n}) & \text{für } n < 0 \end{cases}$$

Potenzgesetze.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Binomialkoeffizienten und deren Eigenschaften.

Definition: Die Zahlen $\binom{n}{m}$ heißen **Binomialkoeffizienten**.

Satz:

(a) Für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $0 < m \leq n$ gilt die Rekursionsformel

$$\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m-1},$$

wobei

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

(b) Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt der **Binomische Lehrsatz**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Beweis von Teil (a): Es gilt

$$\begin{aligned}\binom{n}{m} + \binom{n}{m-1} &= \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!} \\ &= \frac{n!(n+1-m) + n!m}{m!(n+1-m)!} \\ &= \frac{n!(n+1-m+m)}{m!(n+1-m)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{m!(n+1-m)!} \\ &= \binom{n+1}{m}.\end{aligned}$$



Beweis von Teil (b): durch vollständige Induktion über n .

- Induktionsanfang ($n = 0$): Es gilt

$$(a + b)^0 = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1.$$

- Induktionsannahme: Für $n \geq 0$ gelte

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

- Induktionsschluss ($n \rightarrow n + 1$):

$$\begin{aligned}
 (a + b)^{n+1} &= (a + b)(a + b)^n = (a + b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
 &= \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 \\
 &= \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}
 \end{aligned}$$



Direkte Berechnung der Binomialkoeffizienten.

Für $n, m \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leq n$ gilt

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m} = \prod_{k=1}^m \frac{n-k+1}{k}.$$

Klassisches Beispiel: Zahlenlotto.

Es gibt

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!43!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13983816$$

Möglichkeiten, aus einer 49-elementigen Menge eine 6-elementige Teilmenge auszuwählen.

Mit anderen Worten: Die Wahrscheinlichkeit, beim (klassischen) Zahlenlotto "6 aus 49" die 6 richtigen Zahlen zu tippen, beträgt

$$\frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13983816} = 0.00000007151123842018516 \dots$$

Rekursive Berechnung der Binomialkoeffizienten.

					1							
					1		1					
				1		2		1				
			1		3		3		1			
		1		4		6		4		1		
	1		5		10		10		5		1	
...

Pascalsches Dreieck.

Beispiel:

$$\begin{aligned}(a + b)^5 &= 1 \cdot a^0 b^5 + 5 \cdot a^1 b^4 + 10 \cdot a^2 b^3 + 10 \cdot a^3 b^2 + 5 \cdot a^4 b^1 + 1 \cdot a^5 b^0 \\ &= a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5\end{aligned}$$

2.2 Primzahlen

Definition: Eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ heißt **Teiler** von $n \in \mathbb{N}$, falls ein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$n = k \cdot m.$$

Man schreibt dann auch $m|n$. □

Jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ besitzt offensichtlich die beiden Teiler 1 und n , denn es gilt stets

$$n = n \cdot 1 = 1 \cdot n$$

Existiert für $n > 1$ kein weiterer Teiler, so nennt man n eine **Primzahl**.

Die ersten Primzahlen lauten

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots$$

Bemerkung: Es gibt unendlich viele Primzahlen. ■

Hauptsatz der Zahlentheorie.

Satz: Jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ läßt sich als Produkt von Primzahlpotenzen schreiben,

$$n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \dots \cdot p_k^{r_k},$$

wobei p_j Primzahl und $r_j \in \mathbb{N}_0$ für $1 \leq j \leq k$.

Beweis: durch Induktion über n .

- Induktionsanfang ($n = 1$): Es gilt $1 = 2^0$.
- Induktionsannahme: Alle $k \leq n$ besitzen Primfaktorzerlegung.
- Induktionsschluss ($n \rightarrow n + 1$):

Fall 1: Sei $n + 1$ Primzahl. Dann gilt $n + 1 = (n + 1)^1$.

Fall 2: Sei $n + 1$ *keine* Primzahl. Dann gibt es $k, m \leq n$ mit $n + 1 = k \cdot m$.
Somit besitzt $n + 1$ eine Primfaktorzerlegung, da k und m je eine besitzen. ■

Bemerkung: Für $n > 1$ sind die (verschiedenen) Basen p_1, \dots, p_k und die zugehörigen Exponenten $r_1, \dots, r_k \geq 1$ der Primfaktorzerlegung eindeutig.

ggT und kgV.

Definition: Seien $n, m \in \mathbb{N}$ zwei natürliche Zahlen. Dann heißt

$$\text{ggT}(n, m) = \max\{k \mid k \text{ teilt } n \text{ und } k \text{ teilt } m\}$$

der **größte gemeinsame Teiler** (ggT) von n und m . Weiterhin heißt

$$\text{kgV}(n, m) = \min\{k \mid n \text{ teilt } k \text{ und } m \text{ teilt } k\}$$

das **kleinste gemeinsame Vielfache** (kgV) von n und m . □

Beobachtung: Für

$$n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \dots \cdot p_k^{r_k} \quad \text{und} \quad m = p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot \dots \cdot p_k^{s_k}$$

mit Primfaktoren p_1, \dots, p_k und Exponenten $r_1, \dots, r_k, s_1, \dots, s_k \geq 0$ gilt

$$\text{ggT}(n, m) = p_1^{\min(r_1, s_1)} \cdot p_2^{\min(r_2, s_2)} \cdot \dots \cdot p_k^{\min(r_k, s_k)}$$

$$\text{kgV}(n, m) = p_1^{\max(r_1, s_1)} \cdot p_2^{\max(r_2, s_2)} \cdot \dots \cdot p_k^{\max(r_k, s_k)}$$

□

Beispiel. Für

$$\begin{aligned}n &= 525 = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^1 \\m &= 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^0\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}\text{ggT}(525, 180) &= 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^0 = 15 \\ \text{kgV}(525, 180) &= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^1 = 6300\end{aligned}$$

und

$$n \cdot m = 525 \cdot 180 = 15 \cdot 6300 = \text{ggT}(525, 180) \cdot \text{kgV}(525, 180).$$

□

Beobachtung: Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$n \cdot m = \text{ggT}(n, m) \cdot \text{kgV}(n, m).$$

□

Der Euklidische Algorithmus.

Für $n, m \in \mathbb{N}$ läßt sich deren ggT mit dem **Verfahren der iterierten Division (Euklidischer Algorithmus)** bestimmen.

Vorüberlegung: Zu $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq m$, existieren eindeutige $q, r \in \mathbb{N}_0$ mit

$$n = q \cdot m + r, \quad \text{wobei } 0 \leq r < m.$$

Algorithmus (Euklidischer Algorithmus) :

INPUT: $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$.

- Setze $r_0 = n, r_1 = m$ und $j = 1$;
- **REPEAT**
 - $r_{j-1} = q_j \cdot r_j + r_{j+1}$, wobei $0 \leq r_{j+1} < r_j$;
 - Setze $j = j + 1$;

UNTIL ($r_{j+1} = 0$)

OUTPUT: $r_j = \text{ggT}(n, m)$.

Beispiel. Für $n = 3054$ und $m = 1002$ liefert der Euklidische Algorithmus:

$$3054 = 3 \cdot 1002 + 48$$

$$1002 = 20 \cdot 48 + 42$$

$$48 = 1 \cdot 42 + 6$$

$$42 = 7 \cdot \boxed{6} + 0$$

Somit gilt $\text{ggT}(3054, 1002) = 6$ und $\text{kgV}(3054, 1002) = 3054 \cdot 1002 / 6 = 510018$.

\mathbb{Z} -Kombination des $\text{ggT}(n, m)$ von n und m .

$$\begin{aligned} 6 &= 48 - 1 \cdot 42 \\ &= 48 - 1 \cdot (1002 - 20 \cdot 48) = 21 \cdot 48 - 1002 \\ &= 21 \cdot (3054 - 3 \cdot 1002) - 1002 = 21 \cdot 3054 - 64 \cdot 1002. \end{aligned}$$

Die \mathbb{Z} -Kombination von $n = 3054$ und $m = 1002$ ist gegeben durch

$$\text{ggT}(3054, 1002) = 6 = 21 \cdot 3054 - 64 \cdot 1002.$$

2.3 Reelle Zahlen

Erweiterung des Zahlenbereichs der natürlichen Zahlen

- **Ganze Zahlen**

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

- **Rationale Zahlen**

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

BEACHTEN: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

ABER: Die Zahl $\sqrt{2}$ lässt sich beliebig genau durch rationale Zahlen aus \mathbb{Q} *approximieren*, d.h. zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $q \in \mathbb{Q}$ mit

$$|\sqrt{2} - q| < \epsilon.$$

DAHER: Definieren den Zahlenbereich \mathbb{R} der **reellen Zahlen**.

Axiomensystem für die reellen Zahlen.

(I) Regeln der Addition (**Abelsche Gruppe**):

$$(a) \quad x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$(b) \quad x + y = y + x$$

$$(c) \quad x + 0 = 0 + x = x$$

$$(d) \quad x + (-x) = (-x) + x = 0$$

(II) Regeln der Multiplikation:

$$(a) \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

$$(b) \quad x \cdot y = y \cdot x$$

$$(c) \quad x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

$$(d) \quad x \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right) \cdot x = 1 \quad \text{für } x \neq 0$$

(III) Distributivgesetz: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

Weitere Axiome für \mathbb{R} .

(IV) Ordnungseigenschaften:

$$(a) \quad x \leq y \vee y \leq x$$

$$(b) \quad x \leq x$$

$$(c) \quad x \leq y \wedge y \leq x \implies x = y$$

$$(d) \quad x \leq y \wedge y \leq z \implies x \leq z$$

$$(e) \quad x \leq y \implies x + z \leq y + z$$

$$(f) \quad x \leq y \wedge z \geq 0 \implies x \cdot z \leq y \cdot z$$

(V) Vollständigkeitsaxiom (DEDEKIND, 1872):

Sei $\mathbb{R} = L \cup R$ zerlegt in nichtleere Mengen $L, R \neq \emptyset$ mit $\forall x \in L, y \in R : x < y$.

Dann gibt es genau eine **Schnittzahl** $s \in \mathbb{R}$ mit

$$\forall x \in L, y \in R : \quad x \leq s \leq y.$$

Bemerkungen.

- Eine nichtleere Menge mit (I) heißt **Abelsche Gruppe**.
- Eine nichtleere Menge mit (I)–(III) heißt **Körper**.
- Ein Körper mit (IV) heißt **angeordneter Körper**.
- Die rationalen Zahlen \mathbb{Q} bilden einen angeordneten Körper.
- **ABER:** Die rationalen Zahlen erfüllen nicht das Vollständigkeitsaxiom!

DENN: Für

$$L := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2 \vee x < 0\}$$

$$R := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 > 2 \wedge x > 0\}$$

gibt es keine Schnitzzahl in \mathbb{Q} . Die Schnitzzahl wäre $s = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Rechnen mit Ungleichungen und Beträgen.

$$(1) \quad x \leq y \implies -x \geq -y$$

$$(2) \quad x \leq y \wedge z \leq 0 \implies x \cdot z \geq y \cdot z$$

$$(3) \quad x^2 \geq 0$$

$$(4) \quad x \leq y \wedge u \leq v \implies x + u \leq y + v$$

$$(5) \quad 0 \leq x \leq y \wedge 0 \leq u \leq v \implies x \cdot u \leq y \cdot v$$

Beweis: Mit Ordnungsaxiomen (IV), z.B.

(1):

$$x \leq y \implies x + (-x - y) \leq y + (-x - y) \implies -y \leq -x.$$

(2):

$$\begin{aligned} x \leq y \wedge z \leq 0 &\implies x \leq y \wedge (-z) \geq 0 \\ &\implies x \cdot (-z) \leq y \cdot (-z) \\ &\implies x \cdot z \geq y \cdot z \end{aligned}$$

Definition: Zu $a \in \mathbb{R}$ heißt

$$|a| := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0; \\ -a & \text{falls } a < 0; \end{cases}$$

der **Betrag** von a .

Zu $a, b \in \mathbb{R}$ heißt $|a - b|$ der (nichtnegative) **Abstand** der Zahlen a und b .

Eigenschaften:

- (1) $|a| \geq 0$
- (2) $|a| = 0 \implies a = 0$
- (3) $|ab| = |a||b|$
- (4) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (**Dreiecksungleichung**)
- (5) $U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}$ ($\varepsilon > 0$)
 $= (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ (**ε -Umgebung von a**)

Definition: Sei $M \subset \mathbb{R}$ Teilmenge von \mathbb{R} .

(1a) Dann heißt $x \in \mathbb{R}$ **obere Schranke** von M , falls $\forall w \in M : w \leq x$.

(1b) $x \in \mathbb{R}$ heißt **untere Schranke** von M , falls $\forall w \in M : w \geq x$.

(2a) M heißt **nach oben beschränkt**, falls es eine obere Schranke von M gibt.

(2b) M heißt **nach unten beschränkt**, falls es untere Schranke von M gibt.

(3a) $s \in \mathbb{R}$ heißt **Supremum** von M , falls s die kleinste obere Schranke von M ist.

(3b) $s \in \mathbb{R}$ heißt **Infimum** von M , falls s die größte untere Schranke von M ist.

Bezeichnungen:

- $\sup(M)$ Supremum von M ;
- $\inf(M)$ Infimum von M .

Beispiele:

(1) $M = [1, 2) \subset \mathbb{R}$. Dann gilt $\inf(M) = 1$, $\sup(M) = 2$.

(2) Für $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2n+1}{n(n+1)}, n \in \mathbb{N}\} = \{\frac{3}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}, \frac{9}{20}, \frac{11}{30}, \dots\}$ gilt
 $\inf(M) = 0$, $\sup(M) = 3/2$.

Satz:

Jede nichtleere nach oben beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum.

Jede nichtleere nach unten beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Infimum.

Beweis: Mit Hilfe des Vollständigkeitsaxioms (V).

Folgerungen:

(1) Die Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen ist *nicht* nach oben beschränkt.

(2) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$x > 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N} : 0 < \frac{1}{n} < x$$

(3) Zwischen zwei reellen Zahlen $x < y$ liegen (unendlich viele) rationale Zahlen.

3 Konvergenz von Folgen und Reihen

3.1 Normierte Vektorräume

Definition: Sei V ein normierter Vektorraum über \mathbb{R} . Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$ heißt **Norm** auf V , falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind.

(N1) $\|v\| = 0 \iff v = 0$ (**Definitheit**);

(N2) $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}, v \in V$ (**Homogenität**);

(N3) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ für alle $v, w \in V$ (**Dreiecksungleichung**).

V zusammen mit $\|\cdot\|$ heißt dann **normierter Vektorraum**.

Beispiele für Normierte Vektorräume.

- \mathbb{R} mit der Betragsfunktion $|\cdot|$ ist ein normierter Vektorraum.
- Für $n \geq 1$ ist der \mathbb{R}^n , zusammen mit der **p-Norm**, $p \in \mathbb{N}$,

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p}, \quad \text{für } x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n,$$

ein normierter Vektorraum.

Spezialfall: Für $p = 2$ bekommt man die **Euklidische Norm**

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2} \quad \text{für } x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

Weiterhin ($p = \infty$): Die **Maximumnorm**

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \quad \text{für } x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

Weitere Beispiele für Normierte Vektorräume.

Sei $V = C[a, b]$ der Vektorraum aller *stetigen* Funktionen auf $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

- Dann ist die **p-Norm**

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad \text{für } f \in C[a, b],$$

für $p \in \mathbb{N}$ eine Norm auf V .

- **Wichtiger Spezialfall:** Für $p = 2$ ist die **Euklidische Norm**

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}, \quad \text{für } f \in C[a, b],$$

eine Norm auf V .

- **Weiterhin** ($p = \infty$): Die **Maximumnorm** ist gegeben durch

$$\|f\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|, \quad \text{für } f \in C[a, b].$$

3.2 Folgen

Definition: Sei V normierter Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$. Eine **Folge** ist eine Abbildung $\mathbb{N} \rightarrow V$, $n \mapsto a_n$, kurz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder $(a_n)_{n \geq 1}$. \square

Beispiele für Folgen.

- Reelle Folgen (Folgen reeller Zahlen), d.h. $V = \mathbb{R}$, z.B. ist

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad \text{für } n \in \mathbb{N},$$

eine reelle Folge.

- Komplexe Folgen (Folgen komplexer Zahlen), d.h. $V = \mathbb{C}$, z.B. ist

$$a_n = i^n, \quad \text{für } n \in \mathbb{N},$$

eine komplexe Folge.

Weitere Beispiele für Folgen.

- Vektorenfolgen (Folgen von Vektoren), $V = \mathbb{R}^n$ oder $V = \mathbb{C}^n$, z.B. ist

$$a_n = \left(\frac{1}{n}, n, \frac{1}{n^2} \right)^T \in \mathbb{R}^3, \quad \text{für } n \in \mathbb{N},$$

eine Folge reeller Vektoren.

- Funktionenfolgen (Folge von Funktionen), etwa $V = C[a, b]$, z.B. ist für $[a, b] = [0, 1]$ die Folge

$$f(x) = x^n, \quad \text{für } x \in [0, 1] \text{ und } n \in \mathbb{N},$$

eine Funktionenfolge.

Rechenoperationen mit Folgen.

Die Menge aller Folgen in V bildet einen Vektorraum, $V^{\mathbb{N}}$, für den die *Addition* und *skalare Multiplikation* wie folgt definiert sind.

$$\begin{aligned}(a_n)_{n \in \mathbb{N}} + (b_n)_{n \in \mathbb{N}} &:= (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ \lambda(a_n)_{n \in \mathbb{N}} &:= (\lambda a_n)_{n \in \mathbb{N}}\end{aligned}$$

Rekursion und Iteration.

Folgen lassen sich **rekursiv** beschreiben durch

$$a_{n+1} := \Phi(n, a_n), \quad \text{für } n \in \mathbb{N},$$

wobei

$$\Phi : \mathbb{N} \times V \rightarrow V$$

eine bestimmte **Iterationsvorschrift** bezeichnet.

Das Bisektionsverfahren (Intervallhalbierung).

- **Ziel:** Bestimme eine Nullstelle einer stetigen Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.
- **Voraussetzung:** $f(a) \cdot f(b) < 0$.
- **Iteration:** Definiere zwei Folgen $(u_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(v_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ rekursiv mit den Startwerten $(u_0, v_0) = (a, b)$ und der folgenden Iterationsvorschrift.

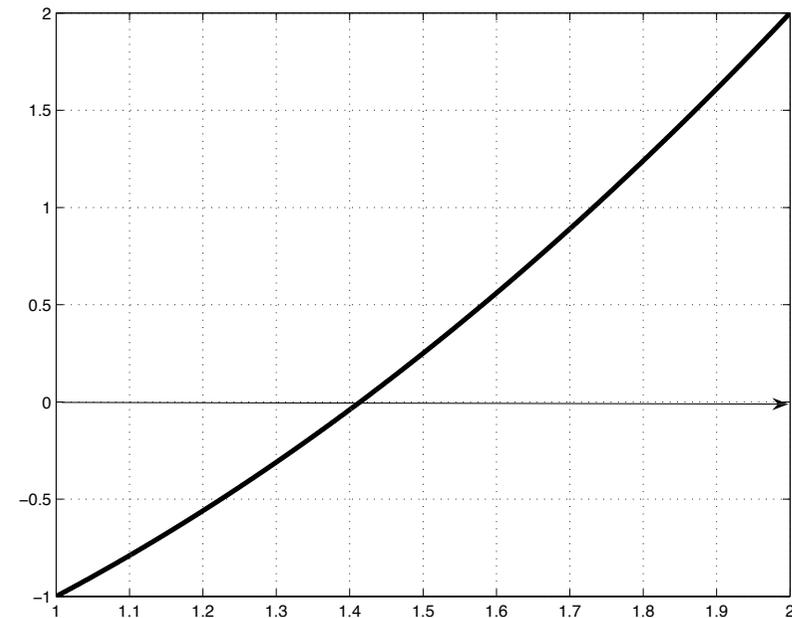
```
FOR  $n = 1, 2, \dots$   
   $x := (u_{n-1} + v_{n-1})/2$   
  IF  $f(x) = 0$  THEN RETURN  
  IF  $(f(x) \cdot f(v_{n-1}) < 0)$  THEN  
     $u_n := x; \quad v_n := v_{n-1};$   
  ELSE  
     $u_n := u_{n-1}; \quad v_n := x;$ 
```

OUTPUT: x mit $f(x) = 0$, Nullstelle von f in $[a, b]$.

Beispiel. $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - 2$, $a = 1$ und $b = 2$.

Beachte: $f(\sqrt{2}) = 0$, d.h. $\sqrt{2} = 1.4142\ 13562\dots$ ist Nullstelle von f .

n	u_n	v_n
0	1.0000 00000	2.0000 00000
1	1.0000 00000	1.5000 00000
2	1.2500 00000	1.5000 00000
3	1.3750 00000	1.5000 00000
10	1.4140 62500	1.4150 39063
20	1.4142 13181	1.4142 14134
30	1.4142 13562	1.4142 13562



Graph von $f(x) = x^2 - 2$.

Beobachtung: Das Bisektionsverfahren konvergiert relativ langsam!

Das Newton-Verfahren.

- **Ziel:** Bestimme eine Nullstelle einer *differenzierbaren* Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.
- **Verwende Newton-Iteration:**

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad \text{für } f'(x_n) \neq 0,$$

mit Startwert x_0 .

Bemerkung: Verfahren *konvergiert*, falls x_0 nahe bei einer Nullstelle von f liegt.

Beispiel: Für $f(x) = x^2 - 2$ und $x_0 = 1$ erhält man

n	0	1	2	3	4	...
t_n	1.0000	1.5000	1.4166 66667	1.4142 15686	1.4142 13562	...

Erinnerung: $f(\sqrt{2}) = 0$, d.h. $\sqrt{2} = 1.4142 13562 \dots$ ist Nullstelle von f .

Konvergenz von Folgen.

Definition: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem normierten Vektorraum V .

Dann heißt

- $(a_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ für $n_j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq n_1 < n_2 < \dots$ eine **Teilfolge** von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **beschränkt**, falls es ein $C > 0$ gibt mit

$$\forall n \in \mathbb{N}: \|a_n\| \leq C.$$

- die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **konvergent** mit **Grenzwert (Limes)** $a \in V$, falls

$$\forall \varepsilon > 0: \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n \geq N: \|a_n - a\| < \varepsilon.$$

Eine nicht-konvergente Folge heißt **divergent**.

- die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **Cauchy-Folge**, falls

$$\forall \varepsilon > 0: \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n, m \geq N: \|a_n - a_m\| < \varepsilon.$$

□

Satz: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem normierten Vektorraum. Dann gilt:

- (a) (a_n) konvergent $\implies (a_n)$ beschränkt;
- (b) (a_n) konvergent $\implies (a_n)$ Cauchy-Folge;
- (c) Falls (a_n) konvergiert, so ist der Grenzwert von (a_n) eindeutig bestimmt.

Beweis von (a): Sei (a_n) konvergent mit Grenzwert a . Dann gilt für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ die *Abschätzung*

$$\|a_n\| = \|a_n - a + a\| \leq \|a_n - a\| + \|a\| < \varepsilon + \|a\| \quad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon).$$

Damit ist die Folge (a_n) beschränkt mit der Konstanten

$$C = \max\{\|a_1\|, \|a_2\|, \dots, \|a_{N-1}\|, \|a\| + \varepsilon\}.$$

Also

$$\forall n \in \mathbb{N}: \|a_n\| \leq C.$$

□

Beweis von (b): Sei (a_n) konvergent mit Grenzwert a . Dann gilt für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ die *Abschätzung*

$$\begin{aligned}\|a_n - a_m\| &= \|a_n - a + a - a_m\| \\ &\leq \|a_n - a\| + \|a_m - a\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

für alle $n, m \geq N = N(\varepsilon/2)$

□

Beweis von (c): Sei (a_n) konvergent mit *verschiedenen* Grenzwerten a und \bar{a} . Dann gelten für $\varepsilon > 0$ die Abschätzungen

$$\|a_n - a\| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon)$$

$$\|a_n - \bar{a}\| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq \bar{N}(\varepsilon)$$

Somit folgt für $n \geq \max\{N, \bar{N}\}$ die Ungleichung

$$\|a - \bar{a}\| = \|a - a_n + a_n - \bar{a}\| \leq \|a_n - a\| + \|a_n - \bar{a}\| < 2\varepsilon.$$

Da dies für *jedes* $\varepsilon > 0$ gilt, folgt $a = \bar{a}$ im Widerspruch zur Annahme $a \neq \bar{a}$. ■

Notationen.

Für eine konvergente Folge (a_n) mit Grenzwert a schreiben wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{oder} \quad a_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty).$$

Uneigentliche Konvergenz ...

... bzw. Divergenz gegen den uneigentlichen Grenzwert $\pm\infty$.

Für *reelle* Folgen definieren wir zusätzlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \iff \forall C > 0: \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N: a_n > C$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \iff \forall C > 0: \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N: a_n < -C$$

□

Bemerkungen.

Die Umkehrung der Aussage im Satz, Teil (b),

$$(a_n) \text{ Cauchyfolge} \implies (a_n) \text{ konvergent}$$

gilt nur in *gewissen* normierten Räumen, nämlich in

vollständigen Räumen bzw. **Banachräumen.**

Einen vollständigen *Euklidischen Vektorraum* nennt man

Hilbertraum.

Beispiele:

- für vollständige Räume: $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(\mathbb{C}, |\cdot|)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$;
- für einen nicht vollständigen Raum: $(C[a, b], \|\cdot\|_2)$.

Satz: Seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen. Dann konvergieren die beiden Folgen $(a_n + b_n)$ und (λa_n) für $\lambda \in \mathbb{R}$ (bzw. $\lambda \in \mathbb{C}$), wobei gilt

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda a_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Beweis: Sei $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, d.h. a sei Grenzwert von (a_n) und b sei Grenzwert von (b_n) .

(a): Für $n \geq \max\{N_1(\varepsilon/2), N_2(\varepsilon/2)\}$ gilt

$$\|(a_n + b_n) - (a + b)\| \leq \|a_n - a\| + \|b_n - b\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(b): Sei $\lambda \neq 0$. Dann gilt für $n \geq N_1(\varepsilon/|\lambda|)$ die Abschätzung

$$\|\lambda a_n - \lambda a\| = |\lambda| \cdot \|a_n - a\| < |\lambda| \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$$

Der Fall $\lambda = 0$ ist *trivial*. ■

Konvergenzgeschwindigkeit.

Definition: Sei (a_n) eine konvergente Folge mit Grenzwert a .

(a) Die Folge (a_n) heißt (mindestens) **linear konvergent**, falls eine Konstante $0 < C < 1$ und ein Index $N \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\forall n \geq N: \|a_{n+1} - a\| \leq C \|a_n - a\|$$

(b) Die Folge (a_n) heißt (mindestens) **superlinear konvergent**, falls es eine nicht-negative Nullfolge $C_n \geq 0$ gibt mit $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = 0$, so dass

$$\forall n: \|a_{n+1} - a\| \leq C_n \|a_n - a\|$$

(c) Die Folge (a_n) heißt **konvergent der Ordnung** (mindestens) $p > 1$, falls es eine nicht-negative Konstante $C \geq 0$ gibt mit

$$\forall n: \|a_{n+1} - a\| \leq C \|a_n - a\|^p.$$

□

4 Konvergenz von Folgen und Reihen

4.1 Konvergenzkriterien für reelle Folgen

Definition: Eine reelle Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt

$$\text{monoton wachsend} \iff \forall n < m: a_n \leq a_m$$

$$\text{streng monoton wachsend} \iff \forall n < m: a_n < a_m$$

$$\text{nach oben beschränkt} \iff \exists C \in \mathbb{R}: \forall n: a_n \leq C$$

Analog definiert man die Begriffe

$$\text{monoton fallend} \iff \forall n < m: a_n \geq a_m$$

$$\text{streng monoton fallend} \iff \forall n < m: a_n > a_m$$

$$\text{nach unten beschränkt} \iff \exists C \in \mathbb{R}: \forall n: a_n \geq C$$

□

Satz: Eine monoton wachsende, nach oben beschränkte reelle Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent mit Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Beweis: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach oben beschränkt. Dann gilt

$$s = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $N = N(\varepsilon)$ mit

$$s - \varepsilon < a_N \leq s$$

Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend, also folgt

$$s - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq s \quad \forall n \geq N,$$

d.h.

$$|s - a_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq N \equiv N(\varepsilon)$$



Folgerung (Prinzip der Intervallschachtelung):

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende reelle Folge und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende reelle Folge mit

$$a_n \leq b_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann sind **beide** Folgen konvergent. Gilt weiterhin

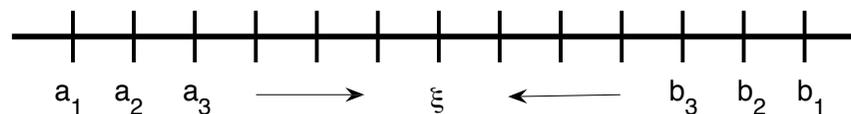
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0,$$

so haben $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ denselben Grenzwert, d.h. es gibt ein $\xi \in \mathbb{R}$ mit

$$\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Weiterhin gelten in diesem Fall die Fehlerabschätzungen

$$|a_n - \xi| \leq |b_n - a_n| \quad \text{und} \quad |b_n - \xi| \leq |b_n - a_n|.$$



□

Beispiel.

Definiere für $0 < a < b$ zwei Folgen (a_n) und (b_n) *rekursiv* durch

$$\begin{aligned} a_0 &:= a & b_0 &:= b \\ a_{n+1} &:= \sqrt{a_n b_n} & b_{n+1} &:= (a_n + b_n)/2 \quad \text{für } n \geq 0. \end{aligned}$$

Die Folgen (a_n) und (b_n) bilden *Intervallschachtelung*, und es gilt

$$(b_{n+1} - a_{n+1}) \leq \frac{b_n - a_n}{2}$$

Der gemeinsame Grenzwert von (a_n) und (b_n)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

heißt **arithmetisch-geometrisches Mittel** von a und b . □

Die Bernoullische Ungleichung.

Es gilt

$$\forall x \geq -1, n \in \mathbb{N}: (1+x)^n \geq 1+nx,$$

wobei Gleichheit nur für $n = 1$ oder $x = 0$ gilt.

Beweis: vollständige Induktion.

Die Geometrische Folge.

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reelle Folge mit $a_n := q^n$ für $q \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$q > 1 : \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty \quad (q^n = (1 + (q-1))^n \geq 1 + n(q-1))$$

$$q = 1 : \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 1$$

$$0 < q < 1 : \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \quad \left(q^n = \frac{1}{(1+(1/q-1))^n} \leq \frac{1}{1+n(1/q-1)} \right)$$

$$-1 < q \leq 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \quad (|q^n| = |q|^n)$$

$$q = -1 : (q^n) \text{ beschränkt, aber nicht konvergent} \quad (q^n \in \{-1, 1\})$$

$$q < -1 : (q^n) \text{ divergent, kein uneigentlicher Grenzwert}$$

Weitere Rechenregeln.

Satz: Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente reelle Folgen. Dann gilt

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) \cdot (\lim_{n \rightarrow \infty} b_n)$$

$$(b) \forall n: b_n \neq 0 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

$$(c) \forall n: a_n \geq 0 \wedge m \in \mathbb{N} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$$

Beweis: Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

Beweis von (a): Für $\varepsilon > 0$ und $n \geq N \equiv N(\varepsilon)$ gilt

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\ &\leq |a_n| \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| \\ &\leq C_a \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| \\ &< (C_a + |b|)\varepsilon \end{aligned}$$

Beweis von (b): Da $b_n \neq 0$ und $b \neq 0$ existiert eine Konstante $C_b > 0$ mit

$$C_b \leq |b_n| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Damit gilt

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - b_n}{b_n b} \right| = \frac{1}{|b_n| \cdot |b|} \cdot |b_n - b| < \frac{1}{C_b \cdot |b|} \cdot \varepsilon$$

für hinreichend große $n \geq N \equiv N(\varepsilon)$.

Nun folgt die Aussage in Teil (b) direkt aus Teil (a), denn es gilt $1/b_n \rightarrow 1/b$.

Beweis von (c): Wir setzen hierzu folgenden Satz voraus.

Satz: Zu $a > 0$ und $m \in \mathbb{N}$ existiert genau eine Zahl $w > 0$ mit $w^m = a$. Diese Zahl wird mit $w = \sqrt[m]{a}$ bezeichnet.

Fall 1: Sei (a_n) eine Nullfolge und $\varepsilon > 0$ vorgegeben.

$$a_n < \varepsilon^m \quad \forall n \geq N(\varepsilon^m)$$

Daraus folgt

$$0 \leq \sqrt[m]{a_n} < \varepsilon$$

und daher $\sqrt[m]{a_n} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

Fall 2: Sei $a > 0$. Verwende die Identität

$$\begin{aligned}
 & (x - y) \sum_{j=1}^m x^{m-j} y^{j-1} \\
 &= (x - y) \cdot \left(x^{m-1} y^0 + x^{m-2} y^1 + \dots + x^0 y^{m-1} \right) \\
 &= x^m y^0 + \underbrace{x^{m-1} y^1 + \dots + x^1 y^{m-1} - x^{m-1} y^1 - \dots - x^1 y^{m-1}}_{=0} - x^0 y^m \\
 &= x^m - y^m
 \end{aligned}$$

Setze nun $x = \sqrt[m]{a_n}$ und $y = \sqrt[m]{a}$. Dann folgt für $\varepsilon > 0$ und $n \geq N(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}
 \left| \sqrt[m]{a_n} - \sqrt[m]{a} \right| &= \frac{|a_n - a|}{\left| (\sqrt[m]{a_n})^{m-1} + \dots + (\sqrt[m]{a})^{m-1} \right|} \\
 &\leq \frac{|a_n - a|}{(\sqrt[m]{a})^{m-1}} \\
 &< C \cdot \varepsilon \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Beispiel.

Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \sqrt{n^2 + 5n + 1} - n$$

Es gilt

$$(n^2 + 5n + 1) - n^2 = \left(\sqrt{n^2 + 5n + 1} - n\right) \left(\sqrt{n^2 + 5n + 1} + n\right),$$

woraus folgt

$$a_n = \frac{(n^2 + 5n + 1) - n^2}{\sqrt{n^2 + 5n + 1} + n} = \frac{5n + 1}{\sqrt{n^2 + 5n + 1} + n} = \frac{5 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1}$$

und somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{5 + 0}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{5}{2}.$$

□

Der Satz von Bolzano-Weierstraß.

Satz (Bolzano-Weierstraß):

Jede reelle beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle beschränkte Folge. Dann gibt es ein Intervall $[A, B]$ mit $\forall n: a_n \in [A, B]$. Betrachte nun die folgende Bisektionsmethode.

```
A1 := A;  
B1 := B;  
FOR k = 1, 2, 3, ...  
  C := (Ak + Bk)/2  
  IF {n | an ∈ [Ak, C]} unendlich THEN  
    Ak+1 := Ak;   Bk+1 := C;  
  ELSE  
    Ak+1 := C;   Bk+1 := Bk;
```

Beobachtung: Die Folgen (A_k) und (B_k) bilden eine Intervallschachtelung, d.h. $\forall k: A_k \leq B_k$, und es gibt einen gemeinsamen Grenzwert

$$\xi = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} B_k.$$

Definiere nun eine Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) wie folgt.

- Setze $n_1 := 1$;
- FOR $k = 2, 3, 4, \dots$
wähle $n_k > n_{k-1}$ mit $a_{n_k} \in [A_k, B_k]$.

Wegen

$$A_k \leq a_{n_k} \leq B_k, \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N},$$

gilt dann $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \xi$. ■

Definition: Sei $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dann wird der Grenzwert der Teilfolge $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ als **Häufungspunkte** der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichnet. □

Das Cauchysche Konvergenzkriterium.

Satz: Der Körper \mathbb{R} ist **vollständig**, d.h. jede reelle Cauchyfolge konvergiert.

Beweis: Zeige, dass jede Cauchyfolge beschränkt ist: Für n und $N = N(\epsilon)$ gilt

$$|a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < \epsilon + |a_N|$$

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt (a_n) einen Häufungspunkt ξ .

Dann gilt für $m, n_k \geq N(\epsilon/2)$:

$$\begin{aligned} |a_m - \xi| &= |a_m - a_{n_k} + a_{n_k} - \xi| \\ &\leq \underbrace{|a_m - a_{n_k}|}_{\text{Cauchyfolge}} + \underbrace{|a_{n_k} - \xi|}_{\text{Häufungspunkt}} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$



Notation:

$\liminf a_n =$ kleinster Häufungspunkt, $\limsup a_n =$ größter Häufungspunkt.

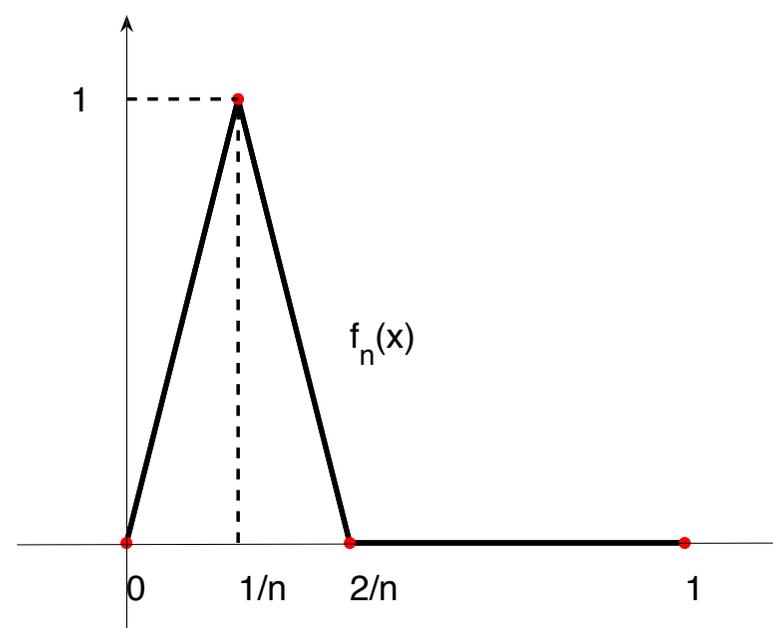
4.2 Konvergenz in normierten Vektorräumen

Beispiel. Betrachte den Vektorraum $C[0, 1]$ aller stetigen Funktionen auf $[0, 1]$.

Für jedes $n \geq 2$ liegt die Funktion

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{für } x \in [0, 1/n]; \\ 2 - nx & \text{für } x \in [1/n, 2/n]; \\ 0 & \text{für } x \in [2/n, 1]; \end{cases}$$

in $C[0, 1]$, d.h. $f_n \in C[0, 1]$ für alle $n \geq 2$.



Der Graph von $f_n(x)$.

Beobachtung: $\{f_n\}_{n \geq 2}$ bildet eine Folge von Funktionen in $C[0, 1]$.

Wie sieht es mit der Konvergenz von f_n in $C[0, 1]$ aus?

Fall 1. Verwende die Euklidische Norm $\|\cdot\|_2$. Dann gilt

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^{1/n} |nx|^2 dx + \int_{1/n}^{2/n} |2-nx|^2 dx + \int_{2/n}^1 0 dx = \dots = \frac{2}{3n}$$

und somit $\|f_n\|_2 \leq 1/\sqrt{n}$ für $n \geq 2$. Die Folge $\{f_n\}_{n \geq 2}$ ist somit bezüglich der Euklidischen Norm eine **Nullfolge** in $C[0, 1]$, d.h. $\{f_n\}_{n \geq 2}$ **konvergiert** gegen Null.

Fall 2. Verwende die Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$. Dann gilt

$$\|f_n\|_\infty = \max_{x \in [0, 1]} |f_n(x)| = 1, \quad \text{für alle } n \geq 2,$$

und es gibt *keine* stetige Funktion $f \in C[0, 1]$ mit $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

Somit **divergiert** die Folge $\{f_n\}_{n \geq 2}$ in $C[0, 1]$ bezüglich der Maximumnorm.

Fazit: Die Konvergenz einer Folge $(a_n)_n$ ist im Allgemeinen nicht nur abhängig vom zugrunde liegenden Vektorraum V , sondern auch (und vor allem!) von der verwendeten Norm $\|\cdot\|$. □

Konvergenz in endlichdimensionalen Vektorräumen.

Bemerkung: In **endlichdimensionalen** Vektorräumen ist die Konvergenz (und der Grenzwert) einer Folge jedoch lediglich von dem jeweiligen Vektorraum abhängig, nicht von der zugrunde liegenden Norm.

Satz (Normäquivalenzsatz): Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum, und seien $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ zwei Normen auf V . Dann gibt es Konstanten $C, C' > 0$ mit

$$C\|v\| \leq \|v\|' \leq C'\|v\|, \quad \text{für alle } v \in V,$$

d.h. die beiden Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ sind **äquivalent** auf V . □

Fazit: Eine Folge (a_n) , die in einem endlichdimensionalen Vektorraum V bezüglich einer Norm $\|\cdot\|$ in V gegen einen Grenzwert $a \in V$ konvergiert, konvergiert ebenso bezüglich jeder anderen Norm $\|\cdot\|'$ in V gegen a . □

- **Beispiele für endlichdimensionale Vektorräume:** $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$.
- **Beispiel für einen unendlichdimensionalen Vektorraum:** $C[a, b]$.

Konvergenz von Folgen im \mathbb{R}^n .

Folgerung: Eine Folge (\mathbf{x}_m) im \mathbb{R}^n konvergiert genau dann, wenn alle n Koordinatenfolgen $(x_j^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$, $j = 1, \dots, n$, in \mathbb{R} konvergieren. Der Grenzwert der Folge (\mathbf{x}_m) lässt sich komponentenweise berechnen.

Beweis: $\mathbf{x}_m \rightarrow \mathbf{x}$ ist äquivalent zu

$$\|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}\|_\infty \rightarrow 0 \quad \iff \quad \forall 1 \leq j \leq n : |x_j^{(m)} - x_j| \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty,$$

und somit $x_j^{(m)} \rightarrow x_j$, $m \rightarrow \infty$, für alle $j = 1, \dots, n$. ■

Beispiel: Für die Folge (\mathbf{x}_m) , gegeben durch

$$\mathbf{x}_m = \left(\frac{1}{m}, 1 + \exp\left(\frac{1}{m}\right), \frac{m^2 + 2m + 3}{2m^2 - 1} \right)^T \in \mathbb{R}^3 \quad \text{für } m \in \mathbb{N}.$$

gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{x}_m = (0, 2, 1/2)^T \in \mathbb{R}^3.$$

□

Konvergenz in endlichdimensionalen Vektorräumen.

Folgerung: In endlichdimensionalen Vektorräumen gilt

- das **Cauchysche Konvergenzkriterium**:

$$\exists \mathbf{a} : \mathbf{a}_m \rightarrow \mathbf{a} \quad (m \rightarrow \infty)$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \equiv N(\varepsilon) : m, n \geq N : \|\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_n\| < \varepsilon$$

- der **Satz von Bolzano-Weierstraß**:

Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beispiel: Für $a_n := z^n$, $z \in \mathbb{C}$ gegeben, gilt

$$|z| > 1 \implies |a_n| = |z|^n \text{ unbeschränkt} \implies (a_n) \text{ divergent;}$$

$$|z| < 1 \implies |a_n| = |z|^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0.$$

□

4.3 Konvergenzkriterien für Reihen

Definition: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, $a_n \in \mathbb{R}$ (oder $a_n \in \mathbb{C}$), eine reelle (komplexe) Folge. Dann heißt die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, definiert durch

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0,$$

eine **Reihe** in \mathbb{R} (bzw. in \mathbb{C}). Die Folgenglieder s_n der Reihe (s_n) werden als **Partialsummen** bezeichnet. Falls die Folge (s_n) der Partialsummen konvergiert, d.h. die Reihe konvergiert, mit einem Grenzwert s , d.h. $s_n \rightarrow s$ ($n \rightarrow \infty$), so schreibt man

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$$

für den **Grenzwert** der Reihe $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. □

Einige Konvergenzkriterien für Reihen.

Satz (Unmittelbare Konvergenzkriterien für Reihen):

(a) Es gilt das **Cauchysche Konvergenzkriterium**

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: m, n \geq N: \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \varepsilon$$

(b) Es gilt die notwendige Bedingung

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \implies \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$$

Beweis:

- Teil (a) folgt unmittelbar aus dem Cauchy-Kriterium für Folgen.
- Teil (b) folgt aus Teil (a) für den Spezialfall $m = n$. ■

Satz (Weitere unmittelbare Konvergenzkriterien für Reihen):

(c) Seien $\sum a_k$, $\sum b_k$ konvergente Reihen. Dann konvergieren die Reihen $\sum (a_k + b_k)$ und $\sum (\lambda a_k)$, und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

(d) Es gilt das **Leibnizsche Konvergenzkriterium**: Eine **alternierende Reihe** der Form $\sum (-1)^k a_k$, $a_k \geq 0$, deren (nicht-negativen) Folgenglieder a_k eine monoton fallende Nullfolge bilden, konvergiert, und es gilt

$$\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \leq \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k$$

Beweis: Teil (c) folgt direkt aus der Linearität der Grenzwertbildung für Folgen.

Zu Teil (d): Für die Reihen

$$u_n := \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k a_k \quad \text{und} \quad v_n := \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k$$

gilt

$$u_{n+1} = u_n + (a_{2n} - a_{2n+1}) \geq u_n$$

$$v_{n+1} = v_n - (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \leq v_n$$

$$v_n = u_n + a_{2n} \geq u_n$$

$$v_n - u_n = a_{2n} \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Somit bilden die Folgen (u_n) , (v_n) eine Intervallschachtelung, konvergieren gegen einen gemeinsamen Grenzwert, und es gilt

$$u_n \leq \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \leq v_n. \quad \blacksquare$$

Die geometrische Reihe.

Beispiel: Für $x, y \in \mathbb{C}$ gilt

$$x^m - y^m = (x - y) \sum_{j=1}^m x^{m-j} y^{j-1}.$$

Insbesondere mit $m = n + 1$, $x = 1$ und $y = q \in \mathbb{C}$ gilt

$$s_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

für die Partialsummen der **geometrischen Reihe** $\sum q^k$. Daraus folgt, dass

- die geometrische Reihe für $|q| < 1$ konvergiert mit Grenzwert

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}$$

- die geometrische Reihe für $|q| > 1$ divergiert. ■

Die harmonische Reihe.

Beispiel: Die **harmonische Reihe**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

divergiert, denn es gilt

$$\sum_{k=n}^m \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n}^m \frac{1}{m} = \frac{1}{m} \sum_{k=n}^m 1 = \frac{m-n+1}{m} \longrightarrow 1 \quad (m \rightarrow \infty)$$

und somit ist das Cauchy-Kriterium

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N: m, n \geq N: \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \varepsilon$$

für $\varepsilon < 1$ verletzt. ■

Die alternierende harmonische Reihe.

Beispiel: Die **alternierende harmonische Reihe**

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

konvergiert nach dem Leibnizschen Konvergenzkriterium, und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} = \ln(2) = 0.69314 \dots$$

für den Grenzwert der alternierenden harmonischen Reihe. □

Absolute Konvergenz von Reihen.

Definition: Eine Reihe $\sum a_k$ heißt **absolut konvergent**, falls die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

konvergiert. □

Beispiel: Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

ist konvergent, aber **nicht** absolut konvergent, denn es gilt $a_k = (-1)^k \frac{1}{k+1}$ und

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| (-1)^k \frac{1}{k+1} \right| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

ist die harmonische Reihe, die **nicht** konvergiert. □

Kriterien für absolute Konvergenz von Reihen.

Satz: Sei $\sum_k a_k$ eine Reihe. Dann gelten die folgenden Konvergenzkriterien.

$$(a) \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent} \iff \left(\sum_{k=0}^n |a_k| \right)_{n \geq 0} \text{ beschränkt;}$$

(b) **Majorantenkriterium:**

$$|a_k| \leq b_k \wedge \sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \implies \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent;}$$

(c) **Quotientenkriterium:** Sei $a_k \neq 0$ ($\forall k \geq k_0$).

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q < 1 \quad (\forall k \geq k_0) \implies \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent;}$$

(d) **Wurzelkriterium:**

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1 \quad (\forall k \geq k_0) \implies \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent.}$$

Beweis: (a): Die Folge $(\sum_{k=0}^n |a_k|)_{n \geq 0}$ ist monoton wachsend und daher genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.

(b): Mit $|a_k| \leq b_k$ gilt $b_k \geq 0$ für alle k . Somit ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sogar absolut konvergent. Nach Teil (a) ist die Folge $(\sum_{k=0}^n b_k)_{n \geq 0}$ beschränkt. Mit

$$\sum_{k=0}^n |a_k| \leq \sum_{k=0}^n b_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$$

folgt, dass $(\sum_{k=0}^n |a_k|)$ beschränkt und somit nach (a) absolut konvergent ist.

(c): Aus $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q$ ($\forall k \geq k_0$) folgt $|a_k| \leq q^{k-k_0} |a_{k_0}|$ per Induktion. Somit:

$$\sum_{k=0}^n |a_k| \leq \sum_{k=0}^{k_0-1} |a_k| + |a_{k_0}| \sum_{j=0}^{n-k_0} q^j \leq \sum_{k=0}^{k_0-1} |a_k| + |a_{k_0}| \frac{1}{1-q} < \infty$$

für alle n . Nach Teil (a) ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

(d): Aus $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q$ ($k \geq k_0$) folgt direkt $|a_k| \leq q^k$ für alle $k \geq k_0$. Somit:

$$\sum_{k=0}^n |a_k| \leq \sum_{k=0}^{k_0-1} |a_k| + \frac{q^{k_0}}{1-q} < \infty \quad \implies \quad \sum_{k=0}^n a_k \quad \text{absolut konvergent.}$$



Bemerkung:

- Das Quotienten- bzw. das Wurzelkriterium ist erfüllt, falls gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$$

- Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist dagegen divergent, falls gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1.$$



Beispiel. Wir untersuchen die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

Es gilt

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$$

und daher

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Daraus folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

Die Reihe ist somit (absolut) konvergent. □

Beispiel. Wir untersuchen die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r} \quad (r \in \mathbb{N}, r \geq 2)$$

Nach dem letzten Beispiel gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^r} &\leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \\ &< 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} < 2 \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist die Reihe (absolut) konvergent. □

Einige Grenzwerte (ohne Beweis):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

□

Beispiel. Wir untersuchen die Konvergenz der **Exponentialreihe**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

Anwendung des Quotientenkriteriums ergibt

$$\left| \frac{\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{z^k}{k!}} \right| = \left| \frac{z^{k+1} k!}{z^k (k+1)!} \right| = \frac{|z|}{k+1} \longrightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

Damit konvergiert die Reihe **für alle** $z \in \mathbb{C}$ (absolut).

Wir setzen

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

□

Der Umordnungssatz für Reihen.

Sei $\sigma : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine beliebige Bijektion (Permutation) auf \mathbb{N}_0 .

Ziel: Vergleiche die beiden Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k} \quad (\sigma_k = \sigma(k))$$

Satz: Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe, und sei $\sigma : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine beliebige Permutation auf \mathbb{N}_0 . Dann ist die umgeordnete Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k}$ ebenfalls absolut konvergent, und die Grenzwerte der beiden Reihen stimmen überein, d.h. es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k}.$$

Beweis: Für $m \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{k=0}^m |a_{\sigma_k}| \leq \sum_{k=0}^N |a_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|,$$

wobei $N \in \mathbb{N}_0$ so groß gewählt sei, dass $\{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m\} \subset \{0, 1, \dots, N\}$.

Somit ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k}$ absolut konvergent und es gilt

$$S' := \sum_{k=0}^{\infty} |a_{\sigma_k}| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| =: S.$$

Nun ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Umordnung der (absolut konvergenten) Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k}$, und somit gilt ebenso $S \leq S'$. Insgesamt bekommt man $S = S'$.

Wendet man dies auf die absolut konvergente Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (|a_k| + a_k)$ an, so bekommt man

$$S + \sum_{k=0}^{\infty} a_k = S' + \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k}$$

woraus die Behauptung $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k}$ folgt. ■

Multiplikation von Reihen.

Frage: Wie funktioniert das “Ausmultiplizieren” von Reihen?

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} b_{\ell} \right) = ???$$

Produkt von endlichen Summen. Für *endliche* Summen gilt

$$(a_0 + \dots + a_m) \cdot (b_0 + \dots + b_n) = \sum_{k=0}^m a_k \left(\sum_{\ell=0}^n b_{\ell} \right) = \sum_{k=0}^m \sum_{\ell=0}^n a_k b_{\ell}.$$

Frage: Gilt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} b_{\ell} \right) \stackrel{?}{=} \sum_{k,\ell=0}^{\infty} a_k b_{\ell}.$$

Beachte:

Jedes Indexpaar $(k, \ell) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ auf der rechten Seite tritt *genau* einmal auf.

Satz: Die Reihen $\sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell}$ und $\sum_{m=0}^{\infty} b_m$ seien absolut konvergent. Weiterhin sei $\sigma : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, $k \mapsto (\sigma_1(k), \sigma_2(k))$ für $k \in \mathbb{N}_0$, eine **bijektive** Abbildung. Dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)}$ absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)} = \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m \right).$$

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}_0$ und für hinreichend großes $N \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{k=0}^n |a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)}| \leq \sum_{\ell=0}^N |a_{\ell}| \sum_{m=0}^N |b_m| \leq \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} |a_{\ell}| \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} |b_m| \right) < \infty.$$

Somit ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)}$ absolut konvergent, und ihr Grenzwert ist nach dem Umordnungssatz unabhängig von der Permutation $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$.

Zur Berechnung des Grenzwertes wählt man eine spezielle Reihenfolge

$\sigma(k)$	0	1	2	3	...
0	0	3	8	15	...
1	1	2	7	14	...
2	4	5	6	13	...
3	9	10	11	12	...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Für $N = (n + 1)^2 - 1$, mit $n \in \mathbb{N}_0$, bekommt man

$$\sum_{k=0}^N a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)} = (a_0 + a_1 + \dots + a_n)(b_0 + b_1 + \dots + b_n),$$

und somit

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N a_{\sigma_1(k)} b_{\sigma_2(k)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{\ell=0}^n a_{\ell} \right) \left(\sum_{m=0}^n b_m \right) = \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m \right). \quad \blacksquare$$

Das Cauchy-Produkt von Reihen.

Weiterer Spezialfall: Nummerierung entlang der Diagonalen

$\sigma(k)$	0	1	2	3	...
0	0	2	5	9	...
1	1	4	8	13	...
2	3	7	12	18	...
3	6	11	17	24	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Man erhält damit das **Cauchy-Produkt** der (absolut konvergenten) Reihen:

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) \\
 &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \dots
 \end{aligned}$$

Anwendung des Cauchy-Produkts.

Für die **Exponentialfunktion**

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad (z \in \mathbb{C})$$

gilt die **Funktionalgleichung**

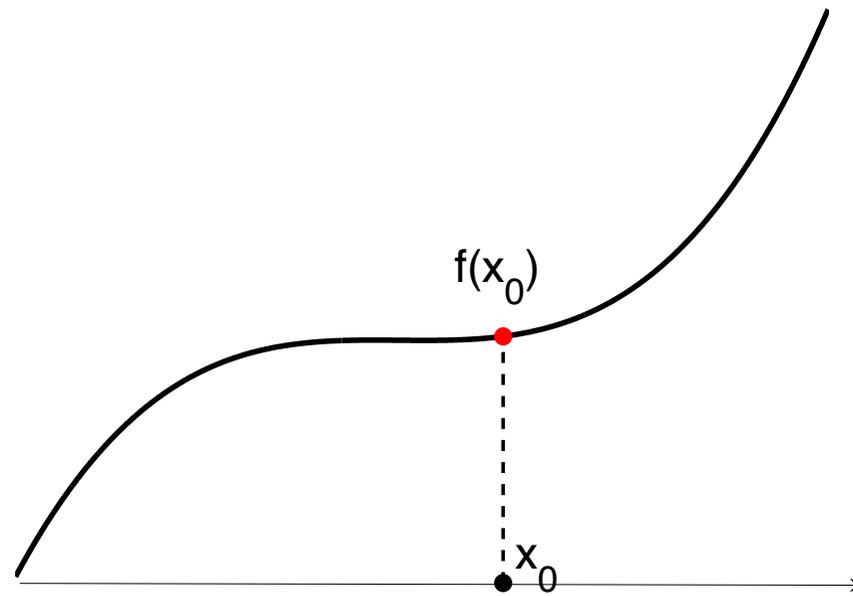
$$\exp(z + w) = \exp(z) \exp(w)$$

Begründung: Die obige Reihe $\exp(z)$, $z \in \mathbb{C}$, ist absolut konvergent. Damit folgt

$$\begin{aligned} \exp(z) \exp(w) &= \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{z^{\ell}}{\ell!} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^m}{m!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z + w)^n = \exp(z + w). \quad \square \end{aligned}$$

5 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

5.1 Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen



Graph einer stetigen Funktion.

Häufungspunkt und Abschluss.

Im Folgenden betrachten wir für normierte Vektorräume V und W Funktionen $f : D \rightarrow W$ mit Definitionsbereich $D \subset V$.

Definition:

- Ein Punkt $x_0 \in V$ heißt **Häufungspunkt** von D , falls eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existiert mit

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad x_n \in D, \quad x_n \neq x_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0;$$

- D' bezeichnet die **Menge aller Häufungspunkte** von D ;
- $\overline{D} = D \cup D'$ bezeichnet den **topologischen Abschluss** von D ;
- Die Menge D heißt **abgeschlossen**, falls $D' \subset D$, also $\overline{D} = D$ gilt. \square

Definition:

- Zu $x_0 \in V$ und $\varepsilon > 0$ bezeichnet

$$K_\varepsilon(x_0) := \{x \in V \mid \|x - x_0\| < \varepsilon\}$$

die (offene) Kugel um x_0 mit Radius ε . Die Menge

$$\overline{K_\varepsilon(x_0)} = \{x \in V \mid \|x - x_0\| \leq \varepsilon\};$$

heißt abgeschlossene Kugel um x_0 mit Radius ε .

- $D \subset V$ heißt beschränkt, falls es $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in V$ gibt mit $D \subset K_\varepsilon(x_0)$;
- $x_0 \in D$ heißt innerer Punkt von D , falls es $\varepsilon > 0$ gibt mit $K_\varepsilon(x_0) \subset D$;
- D^0 bezeichnet die Menge aller inneren Punkte von D ,
kurz: das Innere von D ;
- D heißt offen, falls $D^0 = D$. □

Beispiele.

- Das **offene Einheitsintervall** $D = (0, 1)$ ist offen und beschränkt. Es gilt $\{0, 1\} \notin D$, aber $\{0, 1\} \in D'$. Somit $\overline{D} = [0, 1]$.
- Das **Einheitsintervall** $D = [0, 1]$ ist abgeschlossen und beschränkt.
- Die Menge $D = [0, \infty) \subset \mathbb{R}$ ist abgeschlossen, aber nicht beschränkt.
- Für $D = (-\infty, 0) \cup \{1\} \cup (2, \infty)$ gilt

$$D' = (-\infty, 0] \cup [2, \infty)$$

$$\overline{D} = (-\infty, 0] \cup \{1\} \cup [2, \infty)$$

$$D^0 = (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$$

- Für $x_0 \in V$ ist die Menge $D = K_\varepsilon(x_0) \subset V$ offen, und es gilt $D' = \overline{K}_\varepsilon(x_0)$.
- Innere Punkte $x_0 \in D^0$ sind stets Häufungspunkte von D , denn es gilt

$$x_0 + \frac{\varepsilon}{n+1} \frac{z}{\|z\|} \longrightarrow x_0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{für } z \in V \setminus \{0\}.$$

Definition: Gegeben sei eine Funktion $f : D \rightarrow W$, $D \subset V$, und ein $x_0 \in D'$.

- $f(x)$ **konvergiert** für $x \rightarrow x_0$ gegen den Grenzwert y_0 , falls für **jede** Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, mit $x_n \in D$ und $x_n \neq x_0$, gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y_0$$

Man verwendet in diesem Fall die Notation

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0.$$

- Im Fall $D = \mathbb{R}$ lassen sich **einseitige** Grenzwerte wie folgt definieren.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = y_0 \iff \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in D, x_n < x_0 :$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = y_0 \iff \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in D, x_n > x_0 :$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y_0. \quad \square$$

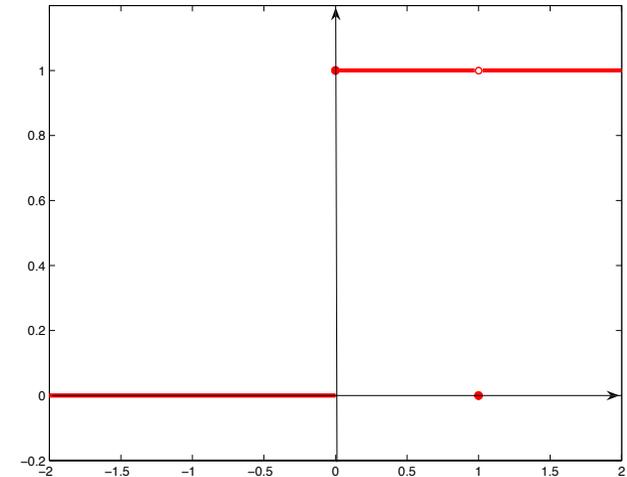
Beispiel. Betrachte die *Sprungfunktion* $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \text{ oder } x = 1; \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $x \rightarrow 0$ existiert der Grenzwert von f nicht!

Weiterhin gilt

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \neq f(1).$$



Graph von $f(x)$.

Beispiel. Für die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = \sin(1/x)$, existiert weder der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ noch $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

Beispiel. Für die Funktion $f(x) = 1/x$ existieren die beiden einseitigen *uneigentlichen* Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Grenzwertsätze für Funktionen.

Bemerkung: Grenzwertsätze für Folgen übertragen sich auf Funktionen:

- Für den Grenzwert einer Summe von Funktionen gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

- Für den Grenzwert eines Produkts einer Funktion mit einem Skalar gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda \cdot f(x)) = \lambda \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

- Für Produkte von reellwertigen (komplexwertigen) Funktionen gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right)$$

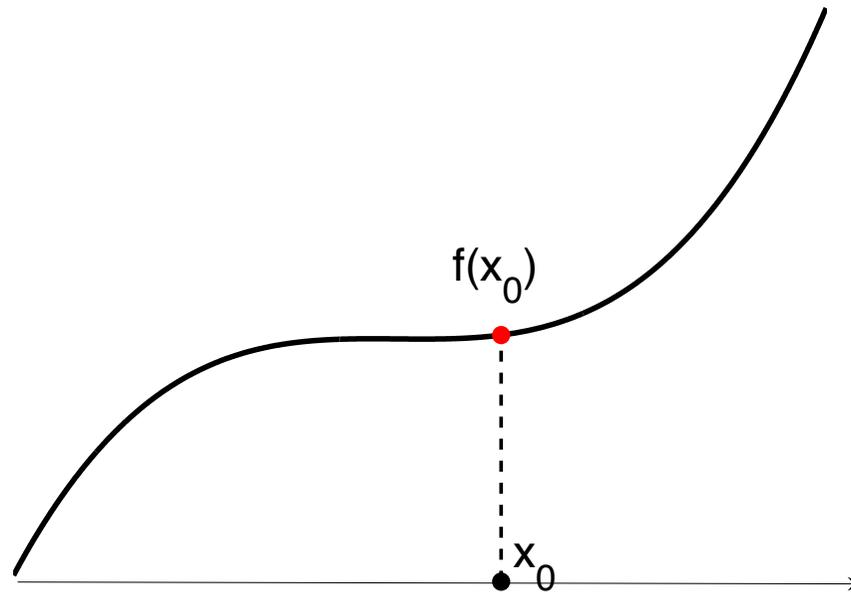
- Für vektorwertige Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ (oder \mathbb{C}^n) gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x), \dots, f_n(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x), \dots, \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right) \quad \square$$

Stetige Funktionen.

Definition: Sei $f : D \rightarrow W$, $D \subset V$, eine Funktion.

- $f(x)$ heißt **stetig ergänzbar** in $x_0 \in D'$, falls $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert.
- $f(x)$ heißt **stetig** im Punkt $x_0 \in D \cap D'$, falls $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
- $f(x)$ heißt **stetig** auf D , falls $f(x)$ in **allen** Punkten $x_0 \in D \cap D'$ stetig ist.



Graph einer stetigen Funktion.

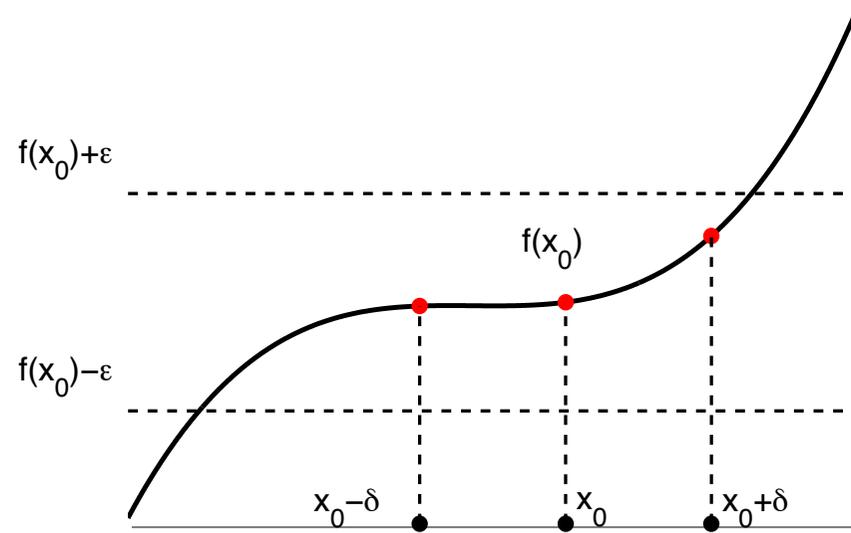
ε - δ -Definition der Stetigkeit.

Satz (ε - δ -Definition der Stetigkeit):

Für $x_0 \in D \cap D'$ sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:

(a) $f(x)$ ist stetig in x_0 , d.h. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$;

(b) $\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: \forall x \in D: \|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$.



Graph einer stetigen Funktion.

Beweis: (a) \Rightarrow (b): **Annahme:** $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x_\delta \in D :$

$$\|x_\delta - x_0\| < \delta \quad \wedge \quad \|f(x_\delta) - f(x_0)\| \geq \varepsilon$$

Die Wahl $\delta = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) generiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \in D$, mit

$$\|x_n - x_0\| < \frac{1}{n} \quad \wedge \quad \|f(x_n) - f(x_0)\| \geq \varepsilon$$

Wegen $\|f(x_n) - f(x_0)\| \geq \varepsilon$ gilt $x_n \neq x_0$ und somit

$$x_n \in D \setminus \{x_0\} \quad \text{für alle } n.$$

Weiterhin gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0.$$

Gleichzeitig konvergiert aber $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ nicht gegen $f(x_0)$. Dies steht im Widerspruch zur Annahme, wonach $f(x)$ im Punkt x_0 stetig ist. \square

(b) \Rightarrow (a): Es gelte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \quad \text{mit } x_n \in D \setminus \{x_0\} \text{ für alle } n.$$

Wähle zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\forall x \in D : \|x - x_0\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon.$$

Sei nun $N = N(\varepsilon)$ mit

$$\forall n \geq N : \|x_n - x_0\| < \delta.$$

Dann folgt direkt

$$\forall n \geq N : \|f(x_n) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

und somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0),$$

d.h. die Funktion $f(x)$ ist stetig im Punkt x_0 . ■

Beispiele für stetige Funktionen.

- Konstante Funktionen $f : D \rightarrow W$, $f(x) \equiv a \in W$, sind stetig.
- Die Identität $\text{id} : V \rightarrow V$, definiert durch $\text{id}(v) = v$ für alle $v \in V$, ist stetig.
- **Univariate Polynome**, $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$), der Form

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad a_k \in \mathbb{R} \text{ (oder } a_k \in \mathbb{C}\text{),}$$

sind stetig.

- **Multivariate Polynome**, d.h. Polynome in n (reellen oder komplexen) Variablen, $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $p : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$), der Form

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{k_n=0}^{m_n} a_{k_1, \dots, k_n} \cdot x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$$

sind stetig.

Weitere Beispiele für stetige Funktionen.

- Die **Wurzelfunktion** $\sqrt[m]{x} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig auf $[0, \infty)$.
- Eine **Potenzreihe**, $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$), der Form

$$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad a_k \in \mathbb{R} \text{ (oder } z \in \mathbb{C}\text{),}$$

ist auf dem Bereich, wo die Reihe $p(z)$ *absolut* konvergiert, stetig.

- **Beispiel:** Die absolut konvergente Exponentialreihe $\exp(z)$ ist überall stetig. Weiterhin sind die Funktionen $\log(z)$, $\sin(z)$, und $\cos(z)$ auf ihren jeweiligen Definitionsbereichen stetig.
- Sind die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ stetig im Punkt x_0 , so auch

$$f(x) + g(x), \quad \lambda \cdot f(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad (\text{für } g(x_0) \neq 0).$$

- **Allgemeiner:** Die Komposition stetiger Funktionen ist stetig.

Beispiel: $f(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$ ist auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ stetig. □

Satz: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen und beschränkten Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Dann gelten die folgenden Eigenschaften.

(a) Existenz einer Nullstelle.

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists x_0 \in (a, b) : f(x_0) = 0$$

(b) **Zwischenwertsatz.**

$$f(a) < c < f(b) \quad \Longrightarrow \quad \exists x_0 \in (a, b) : f(x_0) = c$$

(c) Stetigkeit der Umkehrfunktion.

Ist f streng monoton wachsend, d.h. $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$, so ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : [f(a), f(b)] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig streng monoton wachsend.

(d) **Min-Max-Eigenschaft.**

Die Funktion f nimmt ihr Maximum und Minimum auf $[a, b]$ an, d.h. es gibt $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit

$$f(x_1) = \min_{x \in [a, b]} f(x) \quad \text{und} \quad f(x_2) = \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

Beweis:

(a): klar mit Bisektionsverfahren.

(b): wende Teil (a) auf die Funktion $g(x) = f(x) - c$ an.

(c): Übung (siehe Literatur).

(d): Weise die Existenz des Maximums nach. Sei $s = \sup\{f(x) \mid a \leq x \leq b\}$.

Dann existiert eine Folge $(x_k)_k \subset [a, b]$ mit $f(x_k) \rightarrow s$ ($k \rightarrow \infty$).

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß gibt es eine *konvergente* Teilfolge $(x_{k_j})_j$ von $(x_k)_k$ in $[a, b]$, d.h. für ein $x_0 \in [a, b]$ gilt

$$x_{k_j} \rightarrow x_0 \quad (j \rightarrow \infty) \quad \text{und} \quad f(x_{k_j}) \rightarrow s \quad (j \rightarrow \infty)$$

Wegen der Stetigkeit von f gilt $s = f(x_0) = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$.

Den Nachweis für die Existenz des Minimums führt man analog. ■

Wichtige Bemerkung.

Für die Gültigkeit der Min-Max-Eigenschaft ist es wesentlich, dass man ein **kompaktes** (d.h. abgeschlossenes und beschränktes) Intervall $[a, b]$ betrachtet.

Sonst gilt die Aussage im Allgemeinen nicht!!!

Gegenbeispiel:

Betrachte die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D = (0, \infty) \subset \mathbb{R}$ und

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad \text{für } x \in D = (0, \infty).$$

- f ist auf ganz D stetig, nimmt aber weder Minimum noch Maximum auf D an.

Min-Max-Eigenschaft für multivariate Funktionen.

Definition: Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **kompakt (folgenkompakt)**, falls jede Folge $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $\mathbf{x}_k \in D$, eine **in der Menge D konvergente Teilfolge**

$$\mathbf{x}_{k_j} \rightarrow \mathbf{x}_0 \in D \quad (j \rightarrow \infty)$$

besitzt. □

Satz: Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und ist die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf D , so nimmt f auf D Minimum und Maximum an, d.h. es gibt Punkte $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D$ mit

$$f(\mathbf{x}_1) = \min_{\mathbf{x} \in D} f(\mathbf{x}) \quad \text{und} \quad f(\mathbf{x}_2) = \max_{\mathbf{x} \in D} f(\mathbf{x}).$$

Beweis: Analog wie der Beweis von Teil (d) im vorigen Satz.

Verwende dazu insbesondere den Satz von Bolzano-Weierstraß. ■

Kriterien für Kompaktheit.

Satz: Für eine Menge $D \subset \mathbb{R}$ sind die folgenden Eigenschaften äquivalent.

(a) D ist kompakt;

(b) D ist abgeschlossen und beschränkt;

(c) **Heine-Borel-Überdeckung:**

Jede offene Überdeckung von D besitzt eine **endliche** Teilüberdeckung, d.h. es gilt

$$D \subset \bigcup_{i \in I} U_i, \quad U_i \text{ offen} \quad \Longrightarrow \quad \exists i_1, \dots, i_k \in I : D \subset \bigcup_{j=1}^k U_{i_j}$$

□

Beweis: (nur die Äquivalenz $(a) \iff (b)$).

$(a) \Rightarrow (b)$: Sei D kompakt.

Angenommen, D wäre unbeschränkt. Dann gibt es eine Folge $(x_m) \subset D$ mit $\lim_{m \rightarrow \infty} \|x_m\| = \infty$. Diese Folge kann allerdings keine konvergente Teilfolge besitzen. Dies steht im Widerspruch zur Kompaktheit von D .

Angenommen, D wäre nicht abgeschlossen. Dann gibt es einen Häufungspunkt x_0 von D mit $x_0 \notin D$, d.h. es gibt eine Folge $(x_m) \subset D$ mit $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = x_0 \notin D$. Diese Folge kann aber keine in D konvergente Teilfolge besitzen. Dies steht im Widerspruch zur Kompaktheit von D .

$(b) \Rightarrow (a)$: Sei D abgeschlossen und beschränkt.

Sei $(x_m) \subset D$ eine Folge in D . Da D beschränkt ist, ist auch die Folge (x_m) beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt (x_m) eine konvergente Teilfolge (x_{m_j}) mit $x_{m_j} \rightarrow x_0$. Da D abgeschlossen ist, liegt x_0 in D . Somit ist (x_{m_j}) eine in D konvergente Teilfolge von (x_m) . ■

Beispiel.

Sei $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ die **Einheitssphäre** in \mathbb{R}^n bezüglich der Norm $\|\cdot\|$, d.h.

$$\mathbb{S}^{n-1} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}.$$

Offensichtlich ist \mathbb{S}^{n-1} kompakt (abgeschlossen und beschränkt).

Somit existieren für jede gegebene Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ zwei Vektoren $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{S}^{n-1}$ mit

$$\|\mathbf{Ax}_1\| = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{n-1}} \|\mathbf{Ax}\| \quad \text{und} \quad \|\mathbf{Ax}_2\| = \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{n-1}} \|\mathbf{Ax}\|$$

Dies folgt aus der Min-Max-Eigenschaft, denn die Funktion

$$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{Ax}\|$$

ist stetig auf \mathbb{S}^{n-1} . □

Gleichmäßige Stetigkeit.

Definition: Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, heißt **gleichmäßig stetig** auf D , falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta \implies \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| < \varepsilon \quad \square$$

Satz: Jede stetige Funktion auf einem Kompaktum ist gleichmäßig stetig. D.h.:

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge $D \subset \mathbb{R}^n$.

Dann ist f gleichmäßig stetig auf D . □

Bemerkung: Falls $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ gleichmäßig stetig auf D , so ist f stetig auf D .

Beispiele:

- $f(x) = 1/x$ ist stetig auf $(0, \infty)$, aber nicht gleichmäßig stetig auf $(0, \infty)$.
- $f(x) = \exp(x)$ ist stetig auf \mathbb{R} , aber nicht gleichmäßig stetig auf \mathbb{R} .
- $f(x) = \sin(x)$ ist stetig auf \mathbb{R} und sogar gleichmäßig stetig auf \mathbb{R} .

Stetigkeit vs Gleichmäßige Stetigkeit.

Beispiel: Betrachte die Funktion $f(x) = 1/x$ auf dem Intervall $D = (0, 1]$.

- f ist in jedem Punkt $p \in (0, 1]$ stetig.

Denn: Sei $p \in (0, 1]$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Setze $\delta = \min\left(\frac{p}{2}, \frac{p^2\varepsilon}{2}\right)$.

Dann gilt für alle $x \in D$ mit $|x - p| < \delta$ (und somit $x \geq p/2$),

$$|f(x) - f(p)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{p} \right| = \left| \frac{x - p}{xp} \right| \leq \frac{2|x - p|}{p^2} < \frac{2\delta}{p^2} \leq \varepsilon.$$

- f ist nicht gleichmäßig stetig auf D .

Denn: man kann (zu gegebenem ε) δ **nicht** unabhängig von p wählen.

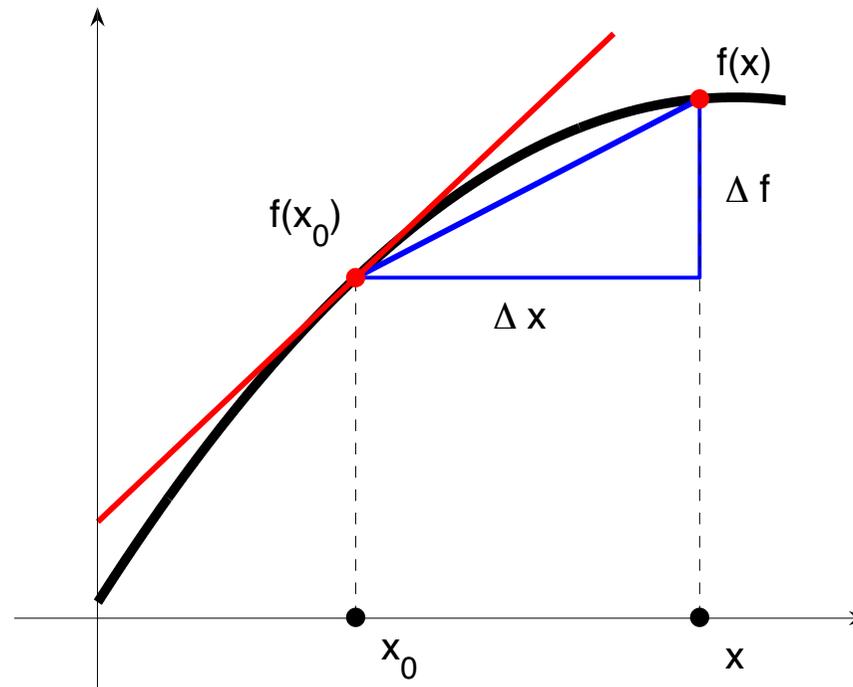
Wäre f gleichmäßig stetig auf $D = (0, 1]$, so gäbe es zu $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0$ mit

$$|f(x) - f(y)| < 1 \quad \text{für alle } x, y \in (0, 1] \text{ mit } |x - y| < \delta.$$

Es gibt aber ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$|1/n - 1/(2n)| = 1/(2n) < \delta \quad \text{und} \quad |f(1/n) - f(1/(2n))| = n \geq 1. \quad \blacksquare$$

5.2 Differentialrechnung einer Variablen



Differenzenquotient und Differentialquotient.

Der **Differenzenquotient**

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \text{für } x \neq x_0,$$

gibt die **Sekantensteigung** an. Betrachten nun den Grenzübergang $x \rightarrow x_0$.

Definition: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D \cap D'$ ein Punkt.

- Für $x \in D$, $x \neq x_0$, nennt man den Ausdruck

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Differenzenquotient bzw. Sekantensteigung von f bezüglich x .

- Die Funktion f heißt **differenzierbar** in x_0 , falls der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. In diesem Fall nennt man den Grenzwert **Ableitung** oder **Differentialquotient** der Funktion f an der Stelle x_0 und schreibt

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

□

Definition: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D \cap D'$ ein Punkt.

- Dann heißen die einseitigen Grenzwerte

$$f'(x_0^+) := \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0^-) := \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

rechtsseitige bzw. linksseitige Ableitung von f bei x_0 .



Bemerkung: Falls f differenzierbar in x_0 , so stimmen die rechtsseitige und linksseitige Ableitung von f bei x_0 überein.



Eine Interpretation der Ableitung einer Funktion.

Die zeitliche Bewegung eines Massenpunktes sei beschrieben durch eine Funktion

$$c : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad c = c(t), \quad I \subset \mathbb{R},$$

wobei t die Zeit und $c(t)$ der Ort des Massenpunktes. Dann ist die Ableitung

$$\dot{c}(t_0) := \frac{dc}{dt}(t_0) := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{c(t) - c(t_0)}{t - t_0}$$

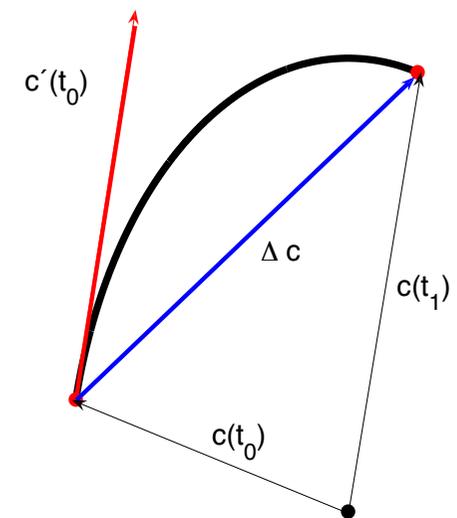
die **Geschwindigkeit**, mit der sich der Massenpunkt bewegt.

Erklärung: In $\Delta t = t - t_0$ legt der Massenpunkt die Strecke $\Delta c = c(t) - c(t_0)$ zurück; die *mittlere Geschwindigkeit* beträgt

$$\frac{\Delta c}{\Delta t} = \frac{c(t) - c(t_0)}{t - t_0}.$$

Für $t \rightarrow t_0$ erhält man die *momentane Geschwindigkeit*,

$$\dot{c}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{c(t) - c(t_0)}{t - t_0}.$$



Beispiel: Ableitung von Monomen.

Betrachte die **Monomfunktion** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x) = x^n$, für $n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt

$$x^n - x_0^n = (x - x_0) \sum_{j=0}^{n-1} x^{n-1-j} x_0^j, \quad \text{für } x, x_0 \in \mathbb{R},$$

und somit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{j=0}^{n-1} x^{n-1-j} x_0^j = n x_0^{n-1}$$

Fazit: Die Funktion $f(x) = x^n$ ist auf ganz \mathbb{R} differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = n x^{n-1}, \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

für die (erste) Ableitung von f . □

Bemerkung: Für eine konstante Funktion $f(x) \equiv c$ gilt $f'(x) \equiv 0$. □

Linearität der Ableitung.

Sind die beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ differenzierbar, so sind auch

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{und} \quad (\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x) \quad \text{für } \lambda \in \mathbb{R},$$

differenzierbare Funktionen, und es gilt

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) \quad \text{und} \quad (\lambda f)'(x) = \lambda \cdot f'(x).$$

Ableitung von Polynomen.

Sei $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein **Polynom**, d.h. p hat die Form

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad \text{mit Koeffizienten } a_k \in \mathbb{R} \text{ für } 0 \leq k \leq n.$$

Dann ist die (erste) Ableitung von p gegeben durch

$$\frac{d}{dx}(p(x)) = \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right) = \sum_{k=0}^n a_k \frac{d}{dx} x^k = \sum_{k=1}^n a_k k x^{k-1}.$$

Ableitung elementarer Funktionen.

Funktion	Ableitung	Parameter
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R}, x > 0$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
$\log(x)$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$\tan x$	$1/\cos^2(x)$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$

Ableitung von vektorwertigen Funktionen.

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}$, eine **vektorwertige** Funktion, d.h. f hat die Form

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))^T \in \mathbb{R}^m, \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Dann wird die Ableitung von f *komponentenweise* berechnet, d.h. es gilt

$$f'(x) = (f'_1(x), \dots, f'_m(x))^T, \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Beispiele:

$$f(x) = (x, e^x, \sin x)^T \implies f'(x) = (1, e^x, \cos x)^T$$

$$f(x) = (\cos x, \sin x)^T \implies f'(x) = (-\sin x, \cos x)^T$$



Aus Differenzierbarkeit folgt Stetigkeit.

Satz: Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ in $x_0 \in D^0$ differenzierbar, so ist f in x_0 stetig.

Beweis: Sei f in x_0 differenzierbar. Dann folgt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0) - (x - x_0) \cdot f'(x_0)) = 0$$

unmittelbar aus der Voraussetzung

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Wegen $\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)f'(x_0) = 0$ folgt schließlich

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

d.h. die Funktion f ist in x_0 stetig. ■

VORSICHT! Die Umkehrung dieser Aussage gilt im Allgemeinen nicht!

Beispiel: Die Funktion $f(x) = |x|$ ist stetig, aber nicht differenzierbar in Null. □

Wichtige Differentiationsregeln.

Satz: Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, in $x_0 \in D^0$ differenzierbare Funktionen. Dann gelten die folgenden Differentiationsregeln.

(a) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g$ in x_0 differenzierbar, und es gilt

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

(b) Die Funktion $f \cdot g$ ist in x_0 differenzierbar, und es gilt die **Produktregel**

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

(c) Ist $g(x_0) \neq 0$, so ist die Funktion $f(x)/g(x)$ in x_0 differenzierbar, und es gilt die **Quotientenregel**

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

Beweis: Die Behauptung in Teil (a) folgt unmittelbar aus der Identität

$$\frac{(\alpha f(x) + \beta g(x)) - (\alpha f(x_0) + \beta g(x_0))}{x - x_0} = \alpha \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \beta \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Genauso folgt Teil (b) aus der Identität

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x) + f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Zu Teil (c): Es gilt

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = -\frac{1}{g(x) \cdot g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}, \quad \text{für } g(x_0), g(x) \neq 0,$$

und somit $(\frac{1}{g})'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$ für $g(x_0) \neq 0$.

Die Behauptung folgt schließlich wie folgt aus der Produktregel, Teil (b).

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - f(x_0)\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$



Weitere Wichtige Differentiationsregeln.

Satz:

(a) Seien $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D, E \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in D^0 \cap (f^{-1}(E))^0$.

Falls f differenzierbar in x_0 und g differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$, so ist auch die Komposition $g \circ f$ in x_0 differenzierbar, und es gilt die **Kettenregel**

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

(b) Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und in $x_0 \in [a, b]$ differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$, so ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : [f(a), f(b)] \rightarrow \mathbb{R}$ in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar, und es gilt

$$((f^{-1})' \circ f)(x_0) = (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Beweis: Teil (a): Nach Voraussetzung gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \eta_1(x)(x - x_0), & \lim_{x \rightarrow x_0} \eta_1(x) &= f'(x_0), \\ g(y) &= g(y_0) + \eta_2(y)(y - y_0), & \lim_{y \rightarrow y_0} \eta_2(y) &= g'(y_0), \end{aligned}$$

wobei $y = f(x)$ und $y_0 = f(x_0)$. Daraus folgt

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x_0) + \eta_2(f(x)) \cdot \eta_1(x)(x - x_0)$$

und somit

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} = \eta_2(f(x)) \cdot \eta_1(x) \longrightarrow g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \quad \text{für } x \rightarrow x_0.$$

Teil (b): Nach Voraussetzung gilt

$$f(x) = f(x_0) + \eta(x)(x - x_0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \eta(x) = f'(x_0) \neq 0,$$

somit $y = y_0 + \eta(f^{-1}(y))(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0))$ für $x = f^{-1}(y)$, und daher

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\eta(f^{-1}(y))} \longrightarrow \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \quad \text{für } y \rightarrow y_0. \quad \blacksquare$$

Verallgemeinerte Produktregel.

Satz: Ist $(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine **Bilinearform**, und sind $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}$, in $x_0 \in D^0$ differenzierbar, so ist auch die Funktion (f, g) in x_0 differenzierbar, und es gilt die **verallgemeinerte Produktregel**

$$\left. \frac{d}{dx} (f(x), g(x)) \right|_{x=x_0} = (f'(x_0), g(x_0)) + (f(x_0), g'(x_0)).$$

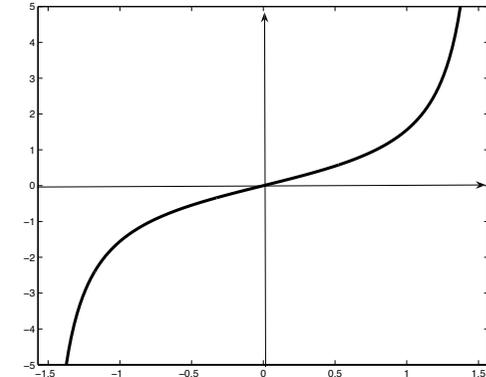
Beweis: Analog zum Beweis der Produktregel:

$$\begin{aligned} & \frac{(f(x), g(x)) - (f(x_0), g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, g(x) \right) + \left(f(x_0), \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) \\ &\longrightarrow (f'(x_0), g(x_0)) + (f(x_0), g'(x_0)), \quad \text{für } x \rightarrow x_0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Beispiel: Anwendung der Quotientenregel.

Betrachte die **Tangensfunktion**

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \text{für } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$



Aus den Ableitungen der trigonometrischen Funktionen

$$\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$$

erhält man die Ableitung der Tangensfunktion mit der Quotientenregel:

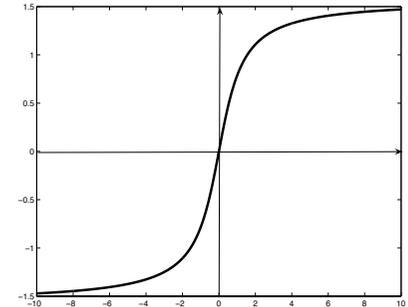
$$\frac{d}{dx} \tan(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right) = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot \sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)},$$

für $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. ■

Beispiel: Ableitung der Umkehrfunktion.

Beispiel 1: Betrachte die Umkehrfunktion der Tangensfunktion,

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

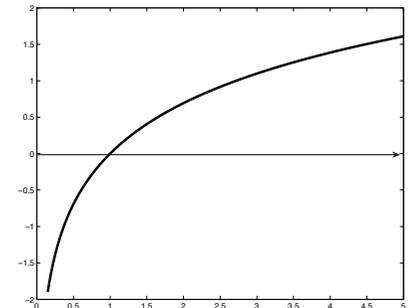


Für die Ableitung von $x = \arctan(y)$, d.h. $y = \tan(x)$, erhält man

$$\frac{d}{dy} \arctan(y) = \frac{1}{\frac{d}{dx} \tan(x)} = \frac{1}{1/\cos^2(x)} = \cos^2(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(x)} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Beispiel 2: Betrachte den **Logarithmus**, die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $\exp(x)$,

$$\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}.$$



Für die Ableitung von $x = \log(y)$, d.h. $y = \exp(x)$, erhält man

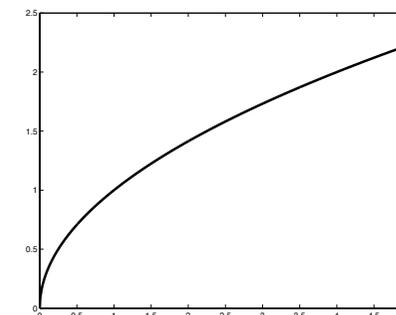
$$\frac{d}{dy} \log(y) = \frac{1}{\frac{d}{dx} \exp(x)} = \frac{1}{\exp(x)} = \frac{1}{y}, \quad \text{für } y \in (0, \infty). \quad \blacksquare$$

Weiteres Beispiel: Ableitung der Umkehrfunktion.

Betrachte **Wurzelfunktion** $\sqrt[n]{\cdot} : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$,

$$x \mapsto \sqrt[n]{x} \quad \text{für } x \in (0, \infty) \text{ und } n \geq 2,$$

als Umkehrfunktion der Monomfunktion $f(x) = x^n$.



$$f(x) = \sqrt{x}$$

Für die Ableitung von $x = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}$, d.h. $y = x^n$, erhält man

$$\frac{d}{dy} \sqrt[n]{y} = \frac{1}{\frac{d}{dx} x^n} = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{ny^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1}{n}-1}.$$



Zwei Beispiele zur Anwendung der Kettenregel.

Beispiel 1: Betrachte für $f(x) = \exp(x)$ und $g(y) = \cos(y)$ die Komposition

$$(g \circ f)(x) = \cos(\exp(x)) : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1].$$

Die Ableitung von $g \circ f$ berechnet man mit der Kettenregel wie folgt.

$$\frac{d}{dx} \cos(\exp(x)) = -\sin(\exp(x)) \cdot \exp(x)$$

Beispiel 2: Betrachte die Exponentialfunktion $a^x = \exp(x \cdot \log(a))$ für $a > 0$.

Die Ableitung der Funktionen a^x und x^x berechnet man mit der Kettenregel:

$$\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} (\exp(x \log(a))) = \exp(x \log(a)) \cdot \log(a) = \log(a) \cdot a^x$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} x^x &= \frac{d}{dx} (\exp(x \log(x))) = \exp(x \log(x)) \left(1 \cdot \log(x) + x \cdot \frac{1}{x} \right) \\ &= x^x (1 + \log(x)), \quad \text{für } x > 0. \end{aligned}$$



Ableitungen höherer Ordnung.

- Ist eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ in jedem Punkt $x_0 \in [a, b]$ differenzierbar, so ist die Ableitung von f ebenso eine Funktion, $f' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.
- Ist f' überall differenzierbar, so erhält man die **zweite Ableitung** f'' von f .
- Ist f'' überall differenzierbar, so erhält man die **dritte Ableitung** f''' usw.
- Ist f n -mal differenzierbar auf $[a, b]$ und ist die n -te Ableitung $f^{(n)}$ auf $[a, b]$ stetig, so heißt f **n -mal stetig differenzierbar**, **C^n -Funktion**.
- Ist f n -mal differenzierbar auf $[a, b]$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, so heißt f **beliebig oft differenzierbar** (unendlich oft differenzierbar), **C^∞ -Funktion**.

Notation:

$$f \in C^0([a, b]) \quad :\iff \quad f \text{ stetig auf } [a, b]$$

$$f \in C^n([a, b]) \quad :\iff \quad f \text{ } n\text{-mal stetig differenzierbar auf } [a, b]$$

$$f \in C^\infty([a, b]) \quad :\iff \quad f \text{ beliebig oft differenzierbar auf } [a, b]$$

6 Weiterer Ausbau der Differentialrechnung

6.1 Mittelwertsätze, Extremwerte, Satz von Taylor

Motivation: Wie wählt man Höhe und Durchmesser einer Konservendose, so dass bei festem Volumen V möglichst wenig Blech verbraucht wird?

Sei r der Radius der Grundfläche und h die Höhe der Konservendose. Dann gilt

$$f(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

für die Oberfläche der Konservendose.

Ziel: Minimiere f unter Variation von r und h unter der Nebenbedingung

$$V = \pi r^2 h \quad \iff \quad h = \frac{V}{\pi r^2}.$$

Minimiere somit

$$f(r) = 2\pi r^2 + 2\frac{V}{r}$$

unter Variation von r . □

Klassifikation von Extrema.

Definition: Sei V normierter Vektorraum und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset V$, eine Funktion.

Dann hat die Funktion f in $x_0 \in D$

- ein **globales Maximum**, falls $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in D$.
- ein **strenges globales Maximum**, falls $f(x) < f(x_0)$ für alle $x \in D \setminus \{x_0\}$.
- ein **lokales Maximum**, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit

$$\|x - x_0\| < \varepsilon \implies f(x) \leq f(x_0) \quad \text{für alle } x \in D.$$

- ein **strenges lokales Maximum**, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit

$$\|x - x_0\| < \varepsilon \implies f(x) < f(x_0) \quad \text{für alle } x \in D \setminus \{x_0\}.$$

Die Begriffe **(strenges) globales Minimum** und **(strenges) lokales Minimum** definiert man analog. Weiterhin fasst man die Begriffe “Minimum” und “Maximum” unter dem Oberbegriff **Extremum** zusammen. \square

Notwendige Kriterien für lokale Extrema.

Satz: *Besitzt eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Extremum, und ist f in x_0 differenzierbar, so gilt $f'(x_0) = 0$.*

Falls x_0 Randpunkt von $[a, b]$ (d.h. $x = a$ oder $x = b$), so gilt

- $f'(x_0) \leq 0$ ($f'(x_0) \geq 0$) für ein lokales Maximum (Minimum) in $x_0 = a$,
- $f'(x_0) \geq 0$ ($f'(x_0) \leq 0$) für ein lokales Maximum (Minimum) in $x_0 = b$.

Beweis: Sei $x_0 \in [a, b]$ ein lokales Maximum von f . Dann gilt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \text{für } x_0 < x \leq \min(x_0 + \varepsilon, b),$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \text{für } \max(x_0 - \varepsilon, a) \leq x < x_0,$$

und daher $f'(x_0^-) \geq 0$ und $f'(x_0^+) \leq 0$. Für $x_0 \in (a, b)$ folgt somit $f'(x_0) = 0$. ■

Definition: Ein Punkt x_0 mit $f'(x_0) = 0$ heißt **stationärer Punkt** von f . □

Zurück zu dem Beispiel mit der Blechdose.

Ziel: Minimiere

$$f(r) = 2\pi r^2 + 2\frac{V}{r}$$

unter Variation von $r \in (0, \infty)$. Es gilt $h = \frac{V}{\pi r^2}$ für die Höhe der Dose.

- Die Funktion f ist stetig in $(0, \infty)$ und es gilt $V > 0$.
- Es gilt $\lim_{r \rightarrow 0^+} f(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = \infty$.
- f besitzt somit in $(0, \infty)$ ein globales Minimum.
- Die notwendige Bedingung

$$f'(r) = 4\pi r - 2\frac{V}{r^2} = 0 \quad \iff \quad 4\pi r^3 = 2V$$

für ein Minimum $r_0 \in (0, \infty)$ ist nur erfüllt für

$$r_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

- **Lösung:** f besitzt in r_0 ein strenges globales Minimum. Es gilt $h_0 = 2r_0$. \square

Ein weiteres Beispiel.

Betrachte die Funktion $f(x) = x^2\sqrt{1-x^2}$ auf dem Intervall $[-1, 1]$. Es gilt

$$f'(x) = \frac{2x - 3x^3}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{für } -1 < x < 1.$$

- **Stationäre Punkte:** $2x - 3x^3 = 0$ gilt nur für $x \in \{-\sqrt{2/3}, 0, \sqrt{2/3}\}$.

$$f'(x) = \begin{cases} > 0 & : -1 < x < -\sqrt{2/3} \\ < 0 & : -\sqrt{2/3} < x < 0 \\ > 0 & : 0 < x < \sqrt{2/3} \\ < 0 & : \sqrt{2/3} < x < 1 \end{cases}$$

- **Globale Minima** bei $x = \pm 1$ und $x = 0$ mit Funktionswert $f(x) = 0$.
- **Globale Maxima** bei $x = \pm\sqrt{2/3}$ mit Funktionswert $f(x) = 2/(3\sqrt{3})$. □

Ein erster Mittelwertsatz.

Satz (Satz von Rolle): Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) , so gilt die Implikation

$$f(a) = f(b) \implies \exists x_0 \in (a, b) : f'(x_0) = 0.$$

Beweis: Da f auf dem Kompaktum $[a, b]$ stetig ist, nimmt f auf $[a, b]$ Minimum und Maximum an.

Fall 1: Liegen diese beiden Extrema am Rand des Intervalls $[a, b]$, so ist f konstant, woraus folgt $f'(x) \equiv 0$.

Fall 2: Anderenfalls liegt ein Extremum x_0 in (a, b) , woraus folgt $f'(x_0) = 0$.



Weitere Mittelwertsätze.

Satz:

- **Erster Mittelwertsatz**

Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) , so gilt:

$$\exists x_0 \in (a, b) \quad : \quad f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

- **Zweiter Mittelwertsatz**

Sind die Funktionen f, g stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) und gilt $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$, so gilt

$$\exists x_0 \in (a, b) \quad : \quad \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Beweis: 1. MWS: Die Funktion

$$h(x) = f(x) - \frac{x-a}{b-a}(f(b) - f(a))$$

erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Rolle, denn $h(a) = f(a) = h(b)$.
Somit gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$0 = h'(x_0) = f'(x_0) - \frac{1}{b-a}(f(a) - f(b)).$$

2. MWS: Wegen $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$, gilt $g(b) \neq g(a)$. Somit erfüllt die Funktion

$$h(x) = f(x) - g(x) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

die Voraussetzungen des Satzes von Rolle, denn es gilt

$$h(a) = f(a) - g(a) \cdot \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = f(b) - g(b) \cdot \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = h(b).$$

Somit gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$0 = h'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \quad \blacksquare$$

Folgerungen aus den Mittelwertsätzen.

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar auf $[a, b]$. Dann gilt:

- Falls $f'(x) \equiv 0$, so ist f konstant auf $[a, b]$.
- Falls $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$, genau dann wenn f monoton wachsend.
- Falls $f'(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$, dann ist f streng monoton wachsend.
- Falls $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in [a, b]$, genau dann wenn f monoton fallend.
- Falls $f'(x) < 0$ für alle $x \in [a, b]$, dann ist f streng monoton fallend.

□

Beispiel. Betrachte $f(x) = x - \log(1 + x)$ für $x \in (-1, \infty)$. Wegen

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \begin{cases} < 0 & \text{für } -1 < x < 0, \\ > 0 & \text{für } 0 < x < \infty, \end{cases}$$

ist f streng monoton fallend in $(-1, 0]$, streng monoton wachsend in $[0, \infty)$. □

Definition (Landau-Symbole): Für eine Funktion $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $0 \in D \cap D'$, und $k \in \mathbb{N}_0$ sagt man:

$$\varphi(h) = o(h^k) \quad :\Leftrightarrow \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h)}{h^k} = 0$$

$$\varphi(h) = \mathcal{O}(h^k) \quad :\Leftrightarrow \quad \exists C, \varepsilon > 0 : \forall 0 < |h| < \varepsilon : \left| \frac{\varphi(h)}{h^k} \right| \leq C$$

□

Bedeutung:

$$\varphi(h) = o(h^k):$$

$\varphi(h)$ konvergiert für $h \rightarrow 0$ **schneller** gegen Null als h^k .

$$\varphi(h) = \mathcal{O}(h^k):$$

$\varphi(h)$ konvergiert für $h \rightarrow 0$ **mindestens so schnell** gegen Null wie h^k .

Beispiel: Ist f differenzierbar in x_0 , so gilt:

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0).$$

Taylor-Entwicklungen und Taylor-Polynome.

Ausgangsfrage: Wie kann man $f(x)$ in der Nähe von x_0 approximieren?

0. Antwort: $f(x) \approx f(x_0)$ für $x \approx x_0$.

1. Antwort: Ist f differenzierbar, so gilt

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{Polynom vom Grad 1}} + o(x - x_0)$$

2. Antwort: Ist f zweimal differenzierbar, so gilt

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0) \frac{(x - x_0)^2}{2}}_{\text{Polynom vom Grad 2}} + o((x - x_0)^2),$$

denn es gilt

$$f'(x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Hinweis: Integration über $[x_0, x]$ liefert die zweite Antwort. □

Satz (Satz von Taylor): Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^n -Funktion und $x_0 \in (a, b)$.

Dann gilt

$$f(x) = T_n(x; x_0) + o((x - x_0)^n)$$

mit dem (eindeutig bestimmten) **Taylor-Polynom**

$$T_n(x; x_0) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Den Punkt x_0 nennt man den **Entwicklungspunkt**.

Ist f eine C^{n+1} -Funktion, so gilt die **Lagrange-Restgliedformel**

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x; x_0)$$

$$R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

für ein $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$ mit $\theta \in (0, 1)$. \square

Zur Form des Taylorschen Polynoms.

Ziel: Approximiere f durch ein Polynom der Form

$$T(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k \quad \text{mit } a_k \in \mathbb{R}.$$

Forderungen: $f^{(j)}(x_0) = T^{(j)}(x_0)$ für $j = 0, 1, \dots, n$.

Beachte: Für die j -te Ableitung von $T(x)$ gilt

$$T^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^n a_k k(k-1) \cdot \dots \cdot (k-j+1) (x - x_0)^{k-j}$$

und weiterhin $T^{(j)}(x_0) = a_j \cdot j! = f^{(j)}(x_0)$ mit der obigen Forderung.

Somit gilt

$$T(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \equiv T_n(x; x_0).$$

□

Restgliedformeln für das Taylorsche Polynom.

Ausgangspunkt. Mit dem Satz von Taylor gilt $f(x) = T_n(x; x_0) + R_n(x; x_0)$.

- **Integraldarstellung:**

$$R_n(x; x_0) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

- **Cauchy-Restgliedformel:**

$$R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x - x_0)^{n+1} (1 - \theta)^n$$

mit $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $\theta \in (0, 1)$

- **Schlömilch-Restgliedformel:**

$$R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{p \cdot n!} (x - x_0)^{n+1} (1 - \theta)^{n+1-p}$$

mit $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $\theta \in (0, 1)$, $p \in \{1, 2, \dots, n+1\}$. □

Taylor-Entwicklung der Exponentialfunktion.

Betrachte die Exponentialfunktion $f(x) = \exp(x)$. Zunächst gilt:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \exp(x) = \exp(x).$$

Mit dem Satz von Taylor gilt um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ die Darstellung

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x; 0)$$

mit dem Lagrange-Restglied

$$R_n(x; 0) = \frac{\exp(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \text{für } \xi = \theta x \text{ mit } 0 < \theta < 1$$

Daraus bekommt man für $0 \leq x \leq 1$ die Fehlerabschätzung

$$|R_n(x; 0)| = \frac{\exp(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \leq \frac{e}{(n+1)!}$$

Beispiel: Für $n = 10$ bekommt man $|R_{10}(x; 0)| \leq 6.81 \cdot 10^{-8}$. □

Taylor-Entwicklung der Sinusfunktion.

Betrachte die Sinusfunktion $f(x) = \sin(x)$. Zunächst gilt:

$$\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$$

Mit dem Satz von Taylor gilt um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ die Darstellung

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+2}(x; 0)$$

mit dem Lagrange-Restglied

$$R_{2n+2}(x; 0) = (-1)^{n+1} \frac{\cos(\xi)}{(2n+3)!} x^{2n+3} \quad \text{für } \xi = \theta x \text{ mit } 0 < \theta < 1$$

Beispiel: Für $x \in [-\pi/6, \pi/6]$, $x \neq 0$ und $n = 3$ bekommt man

$$|R_8(x; 0)| \leq \frac{1}{9!} \cdot |x|^9 \leq \frac{1}{9!} \cdot \left(\frac{\pi}{6}\right)^9 \approx 8.1513 \cdot 10^{-9}.$$

□

Bemerkungen zu Taylor-Reihen.

- Die **Taylor-Reihe**

$$T_{\infty}(x; x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

einer C^{∞} -Funktion f ist im Allgemeinen **nicht konvergent**.

- Falls die Taylor-Reihe $T_{\infty}(x; x_0)$ von f konvergiert, so konvergiert $T_{\infty}(x; x_0)$ **nicht notwendigerweise** gegen f .
- Falls jedoch

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

gilt, so nennt man die Funktion f **reell analytisch**, zum Beispiel:

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Folgerung aus dem Satz von Taylor.

Satz: Gilt für eine C^{n+1} -Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall x \in [a, b] \quad : \quad f^{(n+1)}(x) = 0,$$

so ist $f(x)$ ein Polynom höchstens n -ten Grades.

Beweis: Für das Lagrange-Restglied gilt

$$R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} = 0$$

und somit

$$f(x) \equiv T_n(x; x_0) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$



Beispiel: Taylor-Entwicklung für Polynome.

Ist die Funktion f ein Polynom vom Grad n , d.h. f besitzt die Darstellung

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad \text{mit } a_n \neq 0,$$

so ist für einen *beliebigen* Entwicklungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ das Taylor-Polynom $T_n(x; x_0)$ n -ten Grades von f um x_0 gegeben durch

$$T_n(x; x_0) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

und es gilt $f \equiv T_n$, d.h. f und T_n sind identisch auf ganz \mathbb{R} .

- Das Taylor-Polynom T_n stellt f in der Polynombasis $\{(x - x_0)^k\}_{k=0}^n$ dar.
- Für den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ gilt $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, $0 \leq k \leq n$, und somit

$$T_n(x; 0) \equiv f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Auswertung von Polynomen durch Horner-Schema.

Sei p ein Polynom von Grad n mit der Darstellung

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k \quad \text{mit } a_n \neq 0,$$

für ein $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann lässt sich p wie folgt darstellen.

$$p(x) = a_0 + (x - x_0)(a_1 + (x - x_0)(\dots + (x - x_0)(a_{n-1} + (x - x_0)a_n)\dots))$$

Dann wertet man p *stabil* und *effizient* mit dem **Horner-Algorithmus** aus.

```

y := 0;
for k = n, n-1, ..., 0
  y := a(k) + (x-x0)*y;
end;

```

Beispiel: Für $p(x) = 30(x - 1)^3 + 100(x - 1)^2 + 108(x - 1) + 43$ gilt

$$p(x) = 43 + (x - 1)(108 + (x - 1)(100 + (x - 1)30)).$$

Konvergenz des Newton-Verfahrens.

Satz: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^2 -Funktion und $x^* \in (a, b)$ eine einfache Nullstelle dieser Funktion. Dann ist das Newton-Verfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

mit Startwerten x_0 in der Nähe von x^* **quadratisch konvergent**.

Beweis: Betrachte Taylor-Entwicklung zweiter Ordnung um $x_n \in [a, b]$,

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}(x - x_n)^2$$

woraus für $x = x^*$ mit $f(x^*) = 0$ und $f'(x^*) \neq 0$ folgt

$$-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = (x^* - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}(x^* - x_n)^2.$$

und somit

$$(x_{n+1} - x^*) = \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}(x_n - x^*)^2. \quad \blacksquare$$

Hinreichende Kriterien für lokale Extrema.

Satz: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^2 -Funktion mit $f'(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in (a, b)$.

(a) Falls $f''(x_0) > 0$, dann hat f in x_0 ein strenges lokales Minimum.

(b) Falls $f''(x_0) < 0$, dann hat f in x_0 ein strenges lokales Maximum.

Beweis von (a): Mit der Lagrange-Restgliedformel gilt die Darstellung

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!} (x - x_0)^2$$

für ein $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$ mit $\theta \in (0, 1)$.

Da f'' stetig ist, ist f'' in einer Umgebung von x_0 positiv, d.h. es gilt

$$f''(x) > 0 \quad \text{für alle } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon),$$

für ein $\varepsilon > 0$. In diesem Fall besitzt f in x_0 ein strenges lokales Minimum.

Teil (b) beweist man analog. ■

Hinreichende Kriterien für lokale Extrema.

Problem: Was passiert im Fall $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$?

Hier gibt es zwei Möglichkeiten:

- Der stationäre Punkt x_0 ist ein strenges lokales Extremum.
- Der stationäre Punkt x_0 ist ein **Wendepunkt**.

Satz: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^{2n} -Funktion mit

$$f^{(k)}(x_0) = 0 \quad \text{für } 1 \leq k \leq 2n - 1$$

für ein $x_0 \in (a, b)$.

(a) Falls $f^{(2n)}(x_0) > 0$, dann hat f in x_0 ein strenges lokales Minimum.

(b) Falls $f^{(2n)}(x_0) < 0$, dann hat f in x_0 ein strenges lokales Maximum.

Beweis(idee): Mit der Lagrange-Restgliedformel gilt

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} (x - x_0)^{2n}, \quad \text{für ein } \xi \in (x_0, x). \quad \square$$

Beispiel. Betrachte die Funktion $f(x) = x^5 - x^4$.

Es gilt

$$f'(x) = 5x^4 - 4x^3$$

$$f''(x) = 20x^3 - 12x^2$$

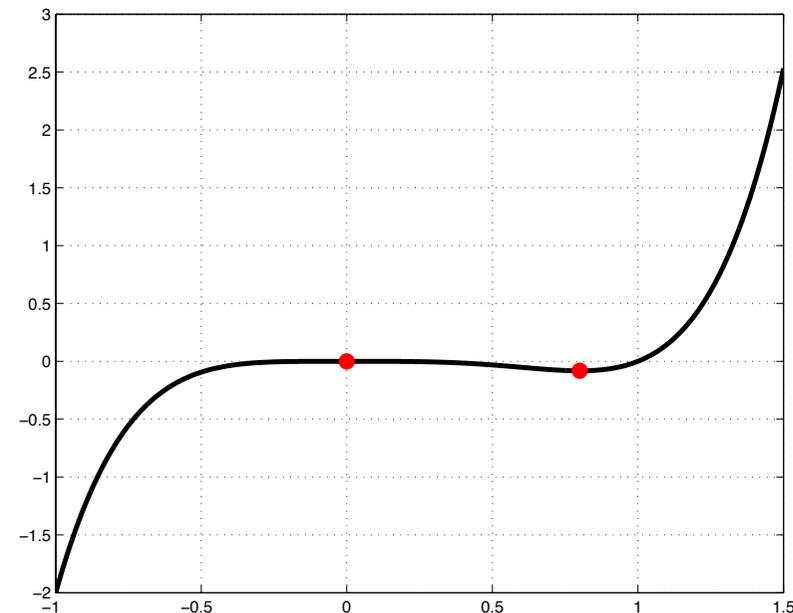
$$f^{(3)}(x) = 60x^2 - 24x$$

$$f^{(4)}(x) = 120x - 24$$

Weiterhin

$$f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = 0$$

$$\text{sowie } f^{(4)}(0) = -24.$$



$$f(x) = x^5 - x^4.$$

Somit besitzt f in $x_0 = 0$ ein strenges lokales Maximum.

Weiterhin besitzt f in $x_1 = 4/5$ ein strenges lokales Minimum,
denn es gilt $f'(4/5) = 0$ und $f''(4/5) = 64/25 > 0$. □

Konvexität und Konkavität.

Definition: Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

- **konvex**, falls für alle $a \leq x_1 < x < x_2 \leq b$ gilt

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} (f(x_2) - f(x_1)).$$

- **streng konvex**, falls für alle $a \leq x_1 < x < x_2 \leq b$ gilt

$$f(x) < f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} (f(x_2) - f(x_1)).$$

- **konkav**, falls für alle $a \leq x_1 < x < x_2 \leq b$ gilt

$$f(x) \geq f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} (f(x_2) - f(x_1)).$$

- **streng konkav**, falls für alle $a \leq x_1 < x < x_2 \leq b$ gilt

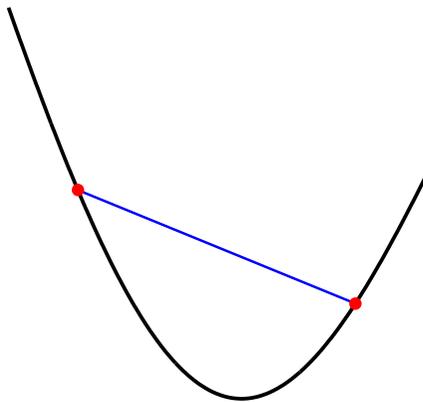
$$f(x) > f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} (f(x_2) - f(x_1)).$$

□

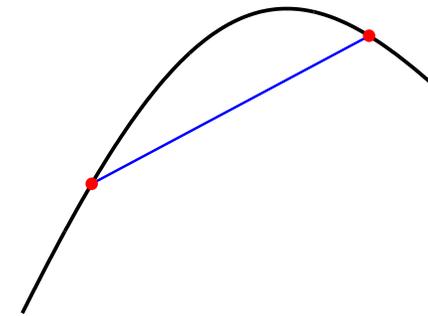
Kriterien für Konvexität und Konkavität.

Satz: Sei f eine C^2 -Funktion auf $[a, b]$. Dann gilt:

- f ist konvex, genau dann wenn $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$;
- f ist konkav, genau dann wenn $f''(x) \leq 0$ für alle $x \in (a, b)$.



f streng konvex (**Linkskurve**)



f streng konkav (**Rechtskurve**)

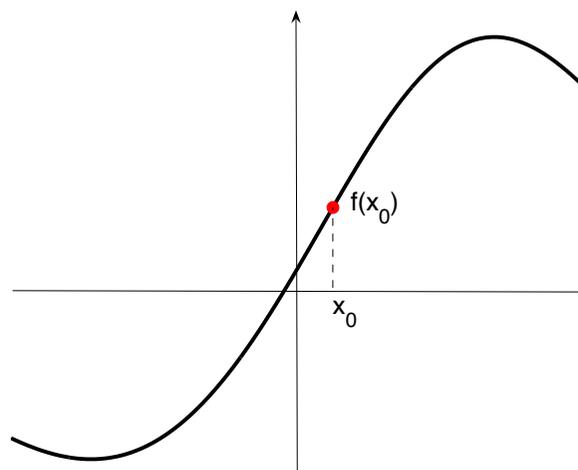
Bemerkung: Für eine C^1 -Funktion f gilt:

- Falls f streng konvex, so liegt der Graph von f oberhalb seiner Tangente.
- Falls f streng konkav, so liegt der Graph von f unterhalb seiner Tangente.

Wendepunkte.

Definition: Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in (a, b)$ einen **Wendepunkt**, falls eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist.

- f ist für ein $\varepsilon > 0$ konvex in $(x_0 - \varepsilon, x_0) \subset [a, b]$ und konkav in $(x_0, x_0 + \varepsilon) \subset [a, b]$ (**Links-Rechtskurve**).
- f ist für ein $\varepsilon > 0$ konkav in $(x_0 - \varepsilon, x_0) \subset [a, b]$ und konvex in $(x_0, x_0 + \varepsilon) \subset [a, b]$ (**Rechts-Linkskurve**).



Links-Rechtskurve in x_0 .

Kriterien für Wendepunkte.

Satz: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^3 -Funktion.

(a) **Notwendiges Kriterium:**

Ist $x_0 \in (a, b)$ ein Wendepunkt, so gilt: $f''(x_0) = 0$.

(b) **Hinreichende Kriterien:**

- Gilt $f''(x_0) = 0$ und $f^{(3)}(x_0) > 0$ für ein $x_0 \in (a, b)$,
so ist x_0 ein Wendepunkt von f mit Rechts-Linkskurve.
- Gilt $f''(x_0) = 0$ und $f^{(3)}(x_0) < 0$ für ein $x_0 \in (a, b)$,
so ist x_0 ein Wendepunkt von f mit Links-Rechtskurve.

Beweis: (a) folgt direkt aus der Stetigkeit von f'' und der Eigenschaft von x_0 .

Zu Teil (b): Aus $f''(x_0) = 0$ und $f^{(3)}(x_0) > 0$ folgt

$$f''(x) < 0 \text{ für } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \quad \text{und} \quad f''(x) > 0 \text{ für } x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$$

für ein $\varepsilon > 0$. Somit ist f konkav in $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ und konvex in $(x_0, x_0 + \varepsilon)$,
d.h. x_0 ist Wendepunkt mit Rechts-Linkskurve. Analog die andere Aussage. ■

Beispiel. Betrachte die Funktion $f(x) = x^4 - x^3$.

Es gilt

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2$$

$$f''(x) = 12x^2 - 6x$$

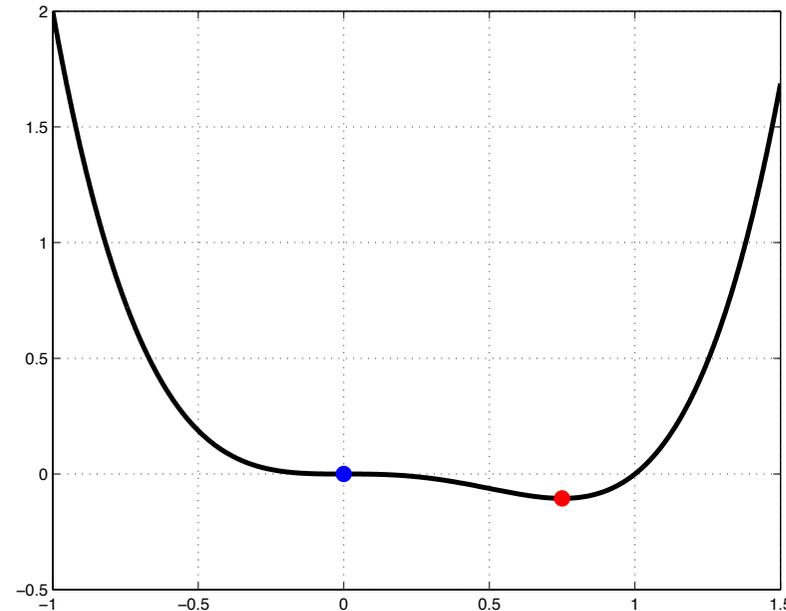
$$f'''(x) = 24x - 6$$

sowie

$$f'(0) = 0$$

$$f''(0) = 0$$

$$f'''(0) = -6$$



$$f(x) = x^4 - x^3.$$

Somit hat f in $x_0 = 0$ einen Wendepunkt (Links-Rechtskurve). Weiterhin hat f ein lokales Minimum in $x_1 = 3/4$, denn $f'(3/4) = 0$ und $f''(3/4) = 9/4 > 0$. \square

Frage: Gibt es weitere Wendepunkte?

6.2 Die Regeln von de l'Hospital

Ausgangsfrage: Wie berechnet man den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

falls

- beide Funktionen gegen Null konvergieren, d.h.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

- beide Funktionen gegen Unendlich konvergieren, d.h.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$$

Beispiel: Sei $f(x) = x^2$ und $g(x) = x$. Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty.$$

Die erste Regel von de l'Hospital.

Satz (Regel von de l'Hospital für $\frac{0}{0}$):

Seien $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, sei $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = g(x_0) = 0$ und es gelte $g(x) \neq 0$ für $x \neq x_0$. Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

sofern der Grenzwert auf der rechten Seite existiert.

Beweis: Mit dem zweiten Mittelwertsatz gilt

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

für einen Punkt $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $\theta \in (0, 1)$ (d.h. θ liegt zwischen x und x_0).

Konvergiert nun x gegen x_0 , so konvergiert auch ξ gegen x_0 , d.h.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \rightarrow x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$



Weitere Regeln von de l'Hospital.

- Für einseitige Grenzwerte gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Falls die rechte Seite gegen $+\infty$ oder $-\infty$ divergiert, d.h. falls gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty,$$

so gilt mit der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty.$$

- Wir betrachten nun uneigentliche Grenzwerte der Form

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

De l'Hospital für uneigentliche Grenzwerte.

Satz: Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

sofern der jeweilige Grenzwert auf der rechten Seite existiert.

Beweis: Mit dem Satz von de l'Hospital und der Substitution $y = 1/x$ folgt

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f(1/y)}{g(1/y)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f'(1/y)(-1/y^2)}{g'(1/y)(-1/y^2)} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f'(1/y)}{g'(1/y)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \end{aligned}$$

Den zweiten Teil der Aussage beweist man analog. ■

Die zweite Regel von de l'Hospital.

Satz (Regel von de l'Hospital für $\frac{\infty}{\infty}$):

Seien $f, g : (a, b) \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, sei $x_0 \in (a, b)$, und es gelte

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$$

sowie $g'(x) \neq 0$ für $x \neq x_0$. Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

sofern der Grenzwert auf der rechten Seite existiert. □

Zwei Beispiele.

- **Beispiel 1:** Betrachte die **sinc-Funktion** $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ bei Null:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

- **Beispiel 2:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-2}{x^2-1}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2-1} = 2 \quad \square \end{aligned}$$

Ein weiteres Beispiel.

- Beispiel 3:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \log(1+x)}{x \cdot \log(1+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{\log(1+x) + \frac{x}{1+x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(1+x) \log(1+x) + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\log(1+x) + 1 + 1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

□

6.3 Kurvendiskussion

Ziel: Feststellung des qualitativen und quantitativen (Werte-)Verhaltens einer gegebenen Funktion $y = f(x)$ mit Skizze des Graphen von f .

Dabei sollen (mindestens) folgende Punkte untersucht werden.

- (1) Definitionsbereich, Wertebereich
- (2) Symmetrien
- (3) Pole (Singularitäten)
- (4) Asymptotisches Verhalten (Verhalten im Unendlichen)
- (5) Nullstellenbestimmung
- (6) Bestimmung der (lokalen) Extrema
- (7) Werteverhalten
- (8) Bestimmung der Wendepunkte
- (9) Skizze des Graphen

Erklärungen zur Kurvendiskussion.

Im folgenden bezeichne $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, eine Funktion.

- f ist **symmetrisch zur y-Achse** (bzw. f ist eine **gerade** Funktion), falls

$$f(-x) = f(x), \quad \text{für alle } x \in D.$$

- f ist **symmetrisch zum Ursprung** (f ist eine **ungerade** Funktion), falls

$$f(-x) = -f(x), \quad \text{für alle } x \in D.$$

- f besitzt einen (algebraischen) **Pol** in $x_0 \in D$, falls

$$f(x) = \frac{g(x)}{(x - x_0)^k}$$

wobei $k \in \mathbb{N}$ (**Ordnung** des Pols) und $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in x_0 mit $g(x_0) \neq 0$.

Ist k ungerade, so ist der Pol ein **Pol mit Vorzeichenwechsel**.

Ist k gerade, so ist der Pol ein **Pol ohne Vorzeichenwechsel**.

Weitere Erklärungen zur Kurvendiskussion.

- Eine Gerade $y = \alpha x + \beta$ heißt **Asymptote** von f für $x \rightarrow \pm\infty$, falls gilt

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - \alpha x - \beta) = 0$$

- Die Koeffizienten einer Asymptoten ergeben sich durch

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \beta = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - \alpha x)$$

- **Werteverhalten:** Hierbei soll untersucht werden, in welchen Intervallen f
 - positiv (negativ)
 - (streng) monoton fallend bzw. (streng) monoton wachsendist.

Beispiel zur Kurvendiskussion.

Betrachte die Funktion

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 4}{x^2}.$$

(1) Definitionsbereich: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

In $x_0 = 0$ ist f **nicht** stetig ergänzbar, denn $\lim_{x \rightarrow 0} (2x^2 + 3x - 4) = -4 \neq 0$.

(2) Symmetrien: keine, f ist weder achsensymmetrisch noch punktsymmetrisch.

(3) Pole: $x_0 = 0$ ist Pol **ohne** Vorzeichenwechsel, denn $\lim_{x \rightarrow 0 \pm} f(x) = -\infty$.

(4) Asymptotik: Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 + 3x - 4}{x^2} = 2,$$

und somit ist $y \equiv 2$ eine horizontale Asymptote.

Beispiel zur Kurvendiskussion (Fortsetzung).

Betrachte die Funktion

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 4}{x^2}.$$

(5) Nullstellen: Es gilt

$$f(x) = 0 \iff 2x^2 + 3x - 4 = 0.$$

Somit sind $x_{1,2} = \frac{1}{4}(-3 \pm \sqrt{41})$ die beiden (einzigen) Nullstellen von f .

(6) Lokale Extrema: Es gilt

$$f'(x) = \frac{-3x + 8}{x^3} \quad \text{und} \quad f''(x) = \frac{6x - 24}{x^4}.$$

Somit liegt bei $x = \frac{8}{3}$ ein stationärer Punkt vor.

Weiterhin gilt $f''\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{27}{64} < 0$.

Daher hat f in $x = \frac{8}{3}$ ein strenges lokales Maximum mit $f\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{41}{16} \approx 2.5625$.

Beispiel zur Kurvendiskussion (Fortsetzung).

Betrachte die Funktion

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 4}{x^2}.$$

(7) Werteverhalten: Es gilt

$$f(x) \begin{cases} > 0 & \text{für } -\infty < x < \frac{1}{4}(-3 - \sqrt{41}) & \text{(positiv)} \\ < 0 & \text{für } \frac{1}{4}(-3 - \sqrt{41}) < x < 0 & \text{(negativ)} \\ < 0 & \text{für } 0 < x < \frac{1}{4}(-3 + \sqrt{41}) & \text{(negativ)} \\ > 0 & \text{für } \frac{1}{4}(-3 + \sqrt{41}) < x < \infty & \text{(positiv)} \end{cases}$$

sowie

$$f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{für } \frac{8}{3} < x < \infty & \text{(streng monoton fallend)} \\ > 0 & \text{für } 0 < x < \frac{8}{3} & \text{(streng monoton wachsend)} \\ < 0 & \text{für } -\infty < x < 0 & \text{(streng monoton fallend)} \end{cases}$$

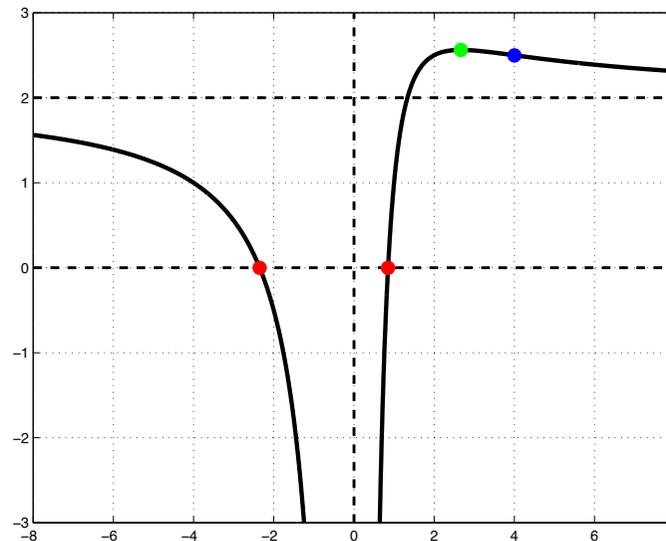
Beispiel zur Kurvendiskussion (Fortsetzung).

(8) Wendepunkte: Es gilt

$$f''(x) = \frac{6x - 24}{x^4} \quad \text{und} \quad f^{(3)}(x) = \frac{96 - 18x}{x^5}.$$

Somit gilt $f''(x) = 0$ für $x = 4$ mit $f(4) = \frac{5}{2}$. Weiterhin gilt $f^{(3)}(4) = \frac{3}{128} > 0$.
Daher liegt bei $x = 4$ ein Wendepunkt mit Rechts-Linkskurve vor.

(9) Skizze:



$$\text{Graph von } f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 4}{x^2}.$$