**Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg** **WiSe 2013/14**
Prof. Dr. Armin Iske
Dr. Hanna Peywand Kiani

# Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften
## Blatt 6

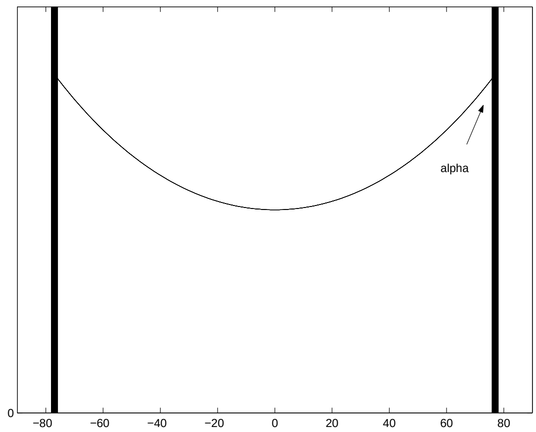
**Aufgabe 1:**

a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes und des Satzes von Rolle die Anzahl der reellen Nullstellen der durch $f(x) = e^{x^2} + 3x^4 - 2$ gegebenen Funktionen.

b)

Zwischen zwei Hochhäusern sei ein Drahtseil gespannt. Wir betrachten das Seil als Graph einer Funktion. Die Ebene, in der der Graph der Funktion verläuft, sei senkrecht auf den Häuserfronten. Für die Funktion gilt bei entsprechender Konstellation
$f : [-a, a] \to \mathbb{R}$

$$f(x) := h_{\min} + k\left(\cosh\left(\frac{x}{k}\right) - 1\right).$$




Berechnen Sie die Linearisierung (Taylorpolynom ersten Grades) von $f$ in den Punkten $\pm a$.

Sei $a = 77$, $h_{\min} = 60$, $k = 80$. Wie hoch hängt das Seil direkt an den Häuserfronten ($x = \pm a$)? Welche Winkel bildet das Seil mit den Hochhausfronten?

Hinweis: $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\cosh'(x) = \sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

**Aufgabe 2:** (de l'Hospital)

a) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte mit den Regeln von de l'Hospital

**i)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

**ii)** $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + 5x + 2}{8x^2 + 8x + 2}$

**iii)** $\displaystyle\lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{2x^2 + 5x + 2}{6x^2 + 5x + 1}$

**iv)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\log(1 + x^2)$

**v)** $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x}$

b) Ein Körper der Masse $m$ befinde sich im freien Fall. Der Reibungswiderstand $R$ sei proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit $R = k(v(t))^2$. Dann gilt mit der üblichen Bezeichnung $g$ für die Erdbeschleunigung für den zurückgelegten Weg

$$s(t) = \frac{m}{k} \log\left(\cosh\left(\sqrt{\frac{kg}{m}} \cdot t\right)\right)$$

(i) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $v(t) = s'(t)$ sowie die Beschleunigung $a(t) = v'(t) = s''(t)$.
Hinweis: $\dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \tanh(x)$, $\tanh'(x) = \dfrac{1}{\cosh^2(x)}$. Beachten Sie auch die Hinweise zur Aufgabe 1b).

(ii) Betrachten Sie nun die Geschwindigkeit und die Beschleunigung für festes $t$ als Funktion der Reibungskonstanten $k$. Berechnen Sie die Grenzwerte der Geschwindigkeit und der Beschleunigung für $k \to 0$ also für den freien Fall ohne Reibung.

**Aufgabe 3:**

In Aufgabe 4b, Blatt 5 haben wir gezeigt, dass für die Ableitungen der Funktion $g(x) = (x+1)\, e^{-3x}$ folgende Formel gilt:

$$g^{(k)}(x) = (-1)^k\, 3^{k-1}(3x + 3 - k)\, e^{-3x} \qquad k \in \mathbb{N}\,.$$

Betrachten Sie nun die Funktion $f(x) = (x+1)\, e^{-3x} + \sin(\frac{x}{5})$

a) Geben Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades $T_2(x)$ von $f(x)$ zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an.

b) Zeigen Sie, dass der absolute Fehler $|R_2(x;0)| := |f(x) - T_2(x;0)|$ im Intervall $\left[-\frac{15}{100}, \frac{15}{100}\right]$ nach oben durch $0.02$ beschränkt ist.

**Aufgabe 4:** Gegeben sei die Rechenvorschrift

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{(x+3)^2}.$$

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $D$ von $f$ in $\mathbb{R}$.

b) Untersuchen Sie die Funktion

$$f : D \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x - 1 + \frac{1}{(x+3)^2}$$

auf folgende Punkte:

Verhalten in Definitionslücken, Verhalten im Unendlichen, Monotonie und Extremalstellen, Wendepunkte und Krümmungsverhalten.

Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen von $f$ in $D$.