Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2013/14**
Prof. Dr. Armin Iske
Dr. Hanna Peywand Kiani

Analysis I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 5

Aufgabe 1: (je 2 Punkte)

Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen in den jeweils angegebenen Punkten x_0 einen linksseitigen und/oder einen rechtsseitigen Grenzwert haben. Welche Funktionen sind in x_0 stetig?

a)
$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-2x} & \text{für } x \neq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{für } x = x_0 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

b)
$$f_2(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{für } x > 0, \\ 1 & \text{für } x = x_0 = 0, \\ 0 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

c)
$$f_3(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = x_0 = 0. \end{cases}$$

d)
$$f_4(x) = \begin{cases} x^3 \cos\left(\frac{1}{x^3}\right) & \text{für } x > 0, \\ x^2 & \text{für } x \leq 0\,, \qquad x_0 = 0. \end{cases}$$

e)
$$f_5(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} & \text{für } x \notin \{1,3\}, \\ \frac{1}{2} & \text{für } x \in \{1,3\}\,, \qquad x_0 = 1. \end{cases}$$

Aufgabe 2: Berechnen Sie ohne Verwendung der Regel von de l'Hospital die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{x\to 3+} \left[\log(x^2 - x - 6) - \log(x-3)\right]$,

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-(1+x)^n}{x}$, $\quad n \in \mathbb{N}$ fest, $\quad$ (Tipp: Formel aus Folie 96 Vorlesung)

c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-4x+3}{x^3-27}$,

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$. (Tipp: Technik aus Folie 97 Vorlesung bzw. 3. binom. Formel)

Aufgabe 3:

a) Im folgenden sind einige Aussagen aufgeführt. Bitte kreuzen Sie die sinnvollen und richtige(n) Aussage(n) an. Sie erhalten die volle Punktzahl, wenn Sie genau die richtige Auswahl getroffen haben. Sonst erhalten Sie keine Punkte. Begründungen und Lösungswege werden nicht bewertet.

(i) Es sei $D = (-\infty, 0) \cup [0, \frac{2}{3}) \cup \{1\}$. Dann gilt:

☐ $D^o = (-\infty, 0) \cup (0, \frac{2}{3})$,

☐ $D' = (-\infty, \frac{2}{3}) \cup \{1\}$,

☐ $\bar{D} = (-\infty, \frac{2}{3}) \cup \{1\}$,

☐ $\bar{D} = D \cup \left\{\frac{2}{3}\right\}$.

(ii) Es sei $f : [-5, 4] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(-5) = -10,\ f(-2) = 4,\ f(1) = -2,\ f(4) = 8$. Dann gilt

☐ $\max\{f(x),\ x \in [-5,4]\} = 8$.

☐ f hat im Intervall $[-5, 4]$ genau drei Nullstellen.

☐ f hat im Intervall $[-5, 0]$ mindestens eine Nullstelle.

☐ Es gibt ein $x_0 \in [-5, 4]$ mit $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in [-5, 4]$.

b) Die Funktion $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$,

$$f(r) := \lim_{n\to\infty} \frac{e^{2r} - r^n \sin\left(\frac{r\pi}{4}\right)}{1 + r^n \sin\left(\frac{r\pi}{4}\right)}$$

besitzt im Intervall $[0, 2]$ keine Nullstelle, obwohl $f(0)$ positiv ist und $f(2)$ negativ ist. Wie verträgt sich das mit dem Zwischenwertsatz?

c) Ein Student der TUHH fährt am Montag um 9 Uhr vom Parkplatz der TUHH an der Schwarzenbergstr. 95 los, und kommt um 14 Uhr auf dem Parkplatz der RWTH Aachen am Templergraben 55 an. Nach einem erfolgreichen Tag an der RWTH und einem lustigen Abend in Aachen macht er sich am nächsten Morgen um 9 auf den Rückweg nach Hamburg. Er startet auf dem Parkplatz der RWTH Aachen am Templergraben 55 und benutzt genau die gleichen Strassen wie auf dem Hinweg nur in umgekehrter Richtung, und erreicht um 14 Uhr den Parkplatz der TUHH an der Schwarzenbergstr. 95. Während der Fahrt nach Hamburg fragt sich der Student, ob es eine Stelle auf seinem Weg gibt, die er am Tag zuvor zur gleichen Uhrzeit passiert hat. Beantworten Sie die Frage des Studenten. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4:

a) Berechnen Sie für die folgenden Funktionen jeweils die erste Ableitung.

$$\begin{aligned} f_1 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} & f_1(x) &= \frac{x^n}{e^x}, \quad n \in \mathbb{N} \text{ beliebig aber fest,} \\ f_2 &: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} & f_2(x) &= \sqrt[x]{x}, \\ f_3 &: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} & f_3(x) &= \sin\left(\sqrt{2 + e^{x^2+1}}\right). \end{aligned}$$

b) Gegeben sei die Funktion $f(x) = (x+1)\, e^{-3x}$.

(i) Berechnen Sie die ersten zwei Ableitungen von f .

(ii) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die k -te Ableitung von f für alle $k \in \mathbb{N}$ durch die Formel

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k\, 3^{k-1}(3x + 3 - k)\, e^{-3x} \qquad k \in \mathbb{N}$$

gegeben ist.

Abgabetermine: 13. - 17.01.2014

Das Team der Analysis I Veranstaltung wünscht Ihnen ein frohes Fest und einen guten Rutsch!