Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2013/14**
Prof. Dr. Armin Iske
Dr. Hanna Peywand Kiani

Analysis I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 4

Aufgabe 1: Untersuchen Sie die nachstehenden rekursiven Folgen auf Konvergenz in $\mathbb{R}$ und bestimmen Sie gegebenenfalls die (reellen) Grenzwerte. Alle auftretenden Folgen seien für $n \in \mathbb{N}$ definiert.

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3}\sqrt{6a_n - 2}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

$$b_1 = 1, \quad b_{n+1} = \frac{1}{3}\sqrt{6b_n - 1}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

$$u_1 = 1\,, \qquad u_{n+1} := \sqrt{3u_n} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,. \qquad \text{(Klausur Wise 11/12)}$$

Aufgabe 2: Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

$$\text{a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + 3k + 1}{3k^2 - 5k} \qquad \text{b)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{4k^2 - k + 1}$$

$$\text{c)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(\frac{k\pi}{4})}{3^k} \qquad \text{d)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k^2 - 1}\,.$$

Plotten Sie die Partialsummen s_n, $n = 1, 2, \ldots, 100$ für die unter b) gegebene Reihe.

Aufgabe 3: Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

$$\text{a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{3^k\,(k+1)} \qquad \text{b)} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3 \cdot 5^{k-1} - 4}\right)^k$$

$$\text{c)} \sum_{k=2}^{\infty} \binom{k}{2} \frac{1}{(2k)!} \qquad \text{d)} \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{k^3}{16}\left(\sqrt{k^6 + 5} - \sqrt{k^6 - 3}\right)\right]^k$$

$$\text{e)} \sum_{k=4}^{\infty} e^{-k} \cdot \left(1 - \frac{3}{k}\right)^{\frac{k}{2}}\,.$$

Aufgabe 4: (5+5 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{k+6}{k(k+1)}$ konvergiert.

Sei s der Grenzwert der Reihe und s_n die Partialsumme $s_n := \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \cdot \frac{k+6}{k(k+1)}$.

Geben Sie eine natürliche Zahl n an, so dass der Abbruchfehler $|s_n - s|$ kleiner als 0.01 wird.

b) Im Rahmen einer längeren Rechnung benötigen Sie den Wert von $\cos(0.5)$. Ihr Pech: Sie haben nur einen ganz einfachen Taschenrechner mit den Grundoperationen $+$, $-$, $\times$, $:$. Ihr Glück: Eine Freundin hat Mathe I schon hinter sich und verrät Ihnen folgende Gleichung:

$$\cos(0.5) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(0.5)^{2k}}{(2k)!}.$$

Begründen Sie, dass die Reihe konvergiert, und geben Sie einen Näherungswert c für $\cos(0.5)$ an, der maximal um $2.5 \cdot 10^{-5}$ vom exakten Wert $\cos(0.5)$ abweicht, d.h.:

$$|\, c - \cos(0.5)\, | \leq 2.5 \cdot 10^{-5}.$$

Zusatzaufgabe: Zeigen Sie, dass der relative Fehler kleiner als $3 \cdot 10^{-5}$ ist. D.h.:

$$\frac{|\, c - \cos(0.5)\, |}{|\cos(0.5)|} \leq 3 \cdot 10^{-5}.$$

Aufgabe 5: Im folgenden sind einige Aussagen aufgeführt. Bitte kreuzen Sie die sinnvollen und richtige(n) Aussage(n) an. Sie erhalten die volle Punktzahl, wenn Sie genau die richtige Auswahl getroffen haben. Sonst erhalten Sie keine Punkte. Begründungen und Lösungswege werden nicht bewertet.

a) ☐ Sei V ein normierter Vektorraum und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in V. Dann konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in V.

☐ Jede rekursiv definierte konvergente reelle Folge ist monoton fallend oder monoton steigend.

☐ Jede rekursiv definierte monoton fallende Folge positiver reeller Zahlen ist konvergent.

☐ Es sei $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad n \in \mathbb{N}$ eine reelle Zahlenreihe.
Aus $-10 < s_{n+1} < s_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ folgt die Konvergenz der Reihe.

☐ Die Reihe $s := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ konvergiert nach dem Quotientenkriterium, denn es gilt $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} < 1$.

b) Gegeben ist die geometrische Folge $a_k := \left(\frac{r+5}{4}\right)^k$, $k \in \mathbb{N}$, mit einem Parameter $r \in \mathbb{R}$.

- ☐ Die Folge divergiert für alle $r > 0$.
- ☐ Die Folge konvergiert genau dann, wenn $|r| < 1$ gilt.
- ☐ Die Folge konvergiert genau dann, wenn $r \in]-9, -1[$ gilt.
- ☐ Die Folge konvergiert genau dann, wenn $r \in]-4, 4]$ gilt.
- ☐ Die Reihe $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$ konvergiert genau dann, wenn $r \in]-9, -1[$ gilt.

Abgabetermine: 16. - 20.12.2013