Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Prof. Dr. Armin Iske
Dr. Hanna Peywand Kiani

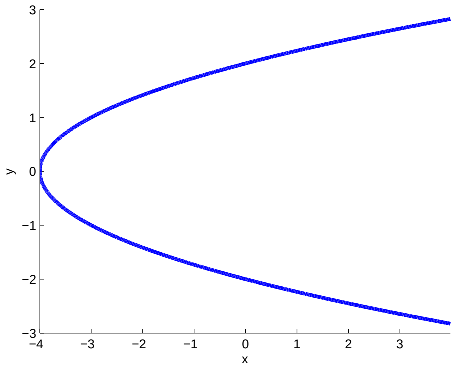
WiSe 2013/14

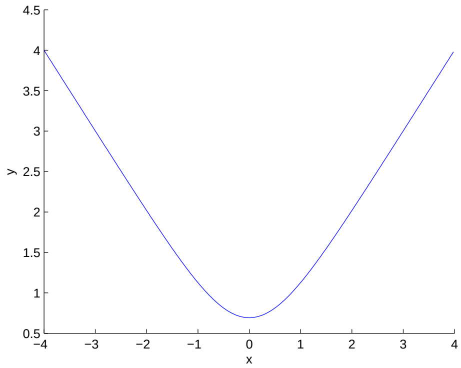
Analysis I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

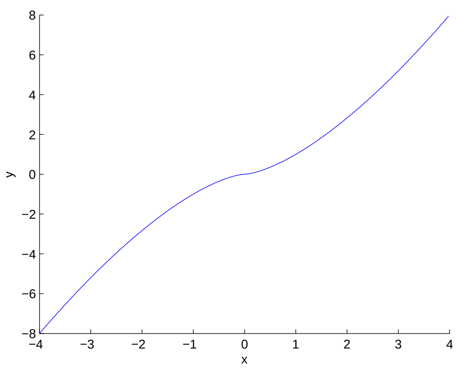
Blatt 3

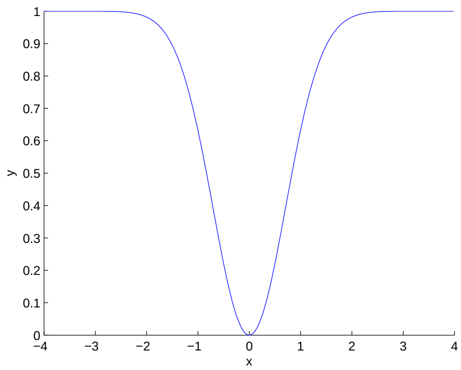
Aufgabe 1:

a) Welche der folgenden Abbildungen stellen Graphen reellwertiger Funktionen $f : [-4, 4] \to [-8, 8]$, $x \mapsto y = f(x)$ dar?









Welche der Funktionen sind injektiv?

Welche der Funktionen sind surjektiv?

Welche der Funktionen sind bijektiv (invertierbar)?

b) Eine reellwertige Funktion $f(x)$ heißt *gerade*, falls $f(-x) = f(x)$ für alle x gilt. Die Funktion $f(x)$ heißt *ungerade*, falls $f(-x) = -f(x)$ für alle x gilt.

Welche der folgenden Funktionen sind gerade und welche sind ungerade?

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f_1(x) = \frac{\cos(x)}{1+x^2}$$

$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f_2(x) = 2x - 2\sin(x)\cos(x)$$

$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f_3(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4})$$

$$f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f_4(x) = e^x + e^{-x}$$

$$f_5 : [-1,1] \to \mathbb{R} \qquad f_5(x) = \frac{x \cdot f_2(x)}{f_1(x)}$$

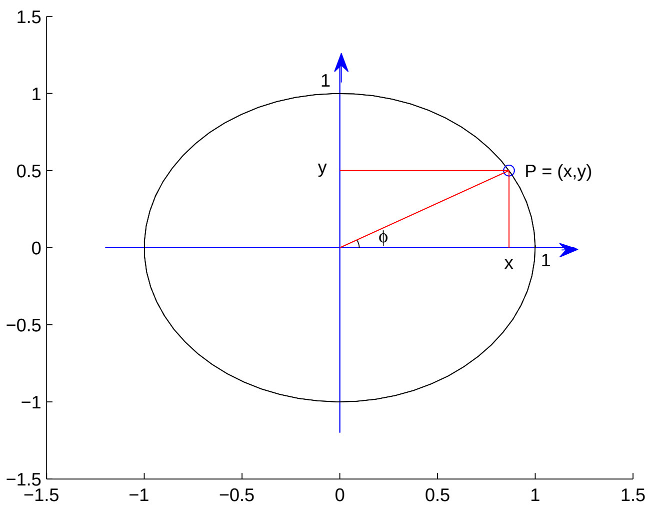
$$f_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f_6(x) = f_2(x)\,(f_1(x))^3 + x^3$$

Skizzieren Sie den Graphen von f_2 für $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

Aufgabe 2:

Es sei $P = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt auf dem Einheitskreis. Dann gilt

$x = \cos(\phi)$ und $y = \sin(\phi)$, wobei $\phi \in [0, 2\pi)$ der Winkel zwischen der positiven $x-$ Achse und dem Ortsvektor von P ist.



Aus dieser Definition kann man die Werte von Sinus und Cosinus für $\phi \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$ unmittelbar ablesen.

a) Zeigen Sie, dass für alle $\phi \in [0, 2\pi)$

$$\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) = 1$$

gilt.

b) Beweisen Sie die Additionstheoreme

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)\,, \qquad \cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

mit Hilfe der Eulerschen Gleichung

$$e^{i\phi} = \cos(\phi) + i \cdot \sin(\phi) \qquad \text{wobei } i \text{ die imaginäre Einheit mit } i^2 = -1 \text{ sei.}$$

c) Zeigen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme, dass folgende Gleichung gilt:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \sin(\phi)\,.$$

d) Zeigen mit Hilfe von a), b) und c), dass $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ gilt.
Tipp: Verwenden Sie erst a) dann c) und danach b) mit $\alpha = \beta = \frac{\pi}{6}$ und schließlich nochmal a).

Aufgabe 3:

a) Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzwerte. Falls nicht anders vermerkt, seien die auftretenden Folgen für $n \in \mathbb{N}$ definiert.

i) $a_n = n^3\left(\sqrt{n^6+5} - \sqrt{n^6-3}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,

ii) $b_n = \dfrac{5 \cdot 2^{n-1} + 3 \cdot 7^{n+1}}{7^n}$,

iii) $d_n = \left[\dfrac{1}{n^2+2}\left(\dfrac{n^3-3n^2+3}{n} - \dfrac{n^2}{2}\right)\right]^3$,

iv) $r_n = ne^{-n}$ Hinweis: l'Hospital ist noch unbekannt!!

Tipp zu iv) Bilden Sie $\dfrac{r_{n+1}}{r_n}$ und benutzen Sie die geometrische Folge.

b) Tina hat ihrem kleinen Bruder beim Schaukeln Anschwung gegeben. Die Schaukel (genauer die Enden der Ketten, an denen die Sitzfläche hängt) hat im Ruhezustand eine Höhe von 0.5 Metern über dem Boden. Nach dem Anschwingen hat die Schaukel die schwindelerregende Höhe von zwei Metern über dem Boden erreicht. Bei jedem Hin- und Herschwingen reduziert sich die über dem Ruhezustand gewonnene maximale Höhe der Schaukel um 5% . Geben Sie eine Folge an, deren n-tes Glied die maximale Höhe beim $n-$ten mal Hin- und Herschwingen angibt. Wie oft schwingt die Schaukel hin und her bevor sie zum ersten Mal unterhalb einer Höhe von einem Meter über dem Boden bleibt?

Bemerkung: Für die Angabe des Ergebnisses als natürliche Zahl ist die Benutzung eines Taschenrechners erlaubt.

Aufgabe 4:

a) Es sei $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ fest vorgegeben und

$$a_n = \frac{(\cos(n\pi) - 1) \cdot r^n}{r^{2n} + 2} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Untersuchen Sie die Folge auf Konvergenz. Geben Sie alle Häufungspunkte (Grenzwerte von Teilfolgen) der Folge an.

b) Im folgenden sind einige Aussagen zu reellen Zahlenfolgen aufgeführt. Bitte kreuzen Sie die sinnvollen und richtige(n) Aussage(n) an. Sie erhalten die volle Punktzahl wenn Sie genau die richtige Auswahl getroffen haben. Sonst erhalten Sie keine Punkte. Begründungen und Lösungswege werden nicht bewertet.

- ☐ Jede beschränkte reelle Folge ist konvergent.
- ☐ Jede konvergente Folge hat einen Häufungspunkt.
- ☐ Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien divergent. Es sei $c_n := a_n + b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann divergiert auch die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- ☐ Es gibt keine beschränkte Folge, die uneigentlich gegen ∞ konvergiert.
- ☐ Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine nach unten beschränkte reelle Folge, so existiert mindestens ein $m \in \mathbb{N}$ mit $a_m \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Abgabetermine: 2. - 6.12.2013