Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2013/14**
Prof. Dr. Armin Iske
Dr. Hanna Peywand Kiani

Analysis I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2

Aufgabe 1: Skizzieren Sie die folgenden Mengen:

$$\begin{aligned}
M_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y+1)^2 < 4\},\\
M_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (|x| + |y| < 2) \wedge (y > -1)\},\\
M_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|, |y|\} < 2\},\\
M_4 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \big(x^2 + (y-1)^2 < 9\big) \wedge (y > |x|)\},\\
M_5 &= [0,1] \times [0,2] \times [-1,0] \subset \mathbb{R}^3.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Bitte bewerten Sie folgende Aussagen.Tragen Sie in die zugehörigen Kästchen die Buchstaben „w" (für wahr) oder „f" für falsch ein. Für jede richtig bewertete Aussage erhalten Sie einen Punkt. Für jede falsch bewertete Aussage wird Ihnen ein halber Punkt abgezogen. Nicht bewertete Aussagen gehen nicht in die Wertung ein.
Hinweis: Hier ist keine Kurvendiskussion mit Ableitungen erforderlich. Es genügt die Eigenschaften der Logarithmus Funktion, die in der Vorlesung angegeben worden sind, auszunutzen.
Gegeben sei $f(x) = \log\left((x-1)^2\right)$, wobei $\log$ den natürlichen Logarithmus bezeichne. Es sei D der maximale Definitionsbereich von f und $W := f(D)$ das Bild von D unter f. Dann gilt

- ☐ $D = \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.
- ☐ $D = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$.
- ☐ $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$.
- ☐ $f(x) = 2\log(x-1) \qquad \forall x \in \mathbb{R} : x > 1$.
- ☐ $f(x) = 2\log(x-1) \qquad \forall x \in \mathbb{R} : x \neq 1$.
- ☐ $W = f(D) = \mathbb{R}$.
- ☐ $\min\{y \in W\} = 0$.
- ☐ $f(2x) - f(x)$ ist konstant.

☐ $f : D \to W$ ist injektiv.

☐ $f : D \to \mathbb{R}$ ist surjektiv.

Aufgabe 3:

a) Beweisen Sie mit Hilfe der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung:

$$\log_{10} 2 \notin \mathbb{Q}\,.$$

b) Zeigen Sie ohne Verwendung elektronischer Hilfsmittel (also unter Klausurbedingungen), dass folgende Abschätzung gilt:

$$x \in \mathbb{R},\ |x| \leq 0.3 \Longrightarrow \left| \tfrac{x^3}{3!}\, e^x \right| \leq 0.01\,.$$

Aufgabe 4: Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion

a) (i)

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

(ii) (Aufgabe 1a, Vordiplomsklausur WiSe 02/03)

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{2}{k^3 - k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n(n-1)} \qquad n \geq 2\,,$$

(iii)

$$(1-x)^n \leq 1 - nx + \frac{1}{2}n(n-1)x^2 \qquad \forall x \in (0,1) \text{ und } \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

b) Was ist falsch an dem folgenden ,,Induktionsbeweis” dafür, dass alle Studierenden das gleiche Studienfach haben?

Zu beweisen ist die Aussage:

A(n) : In jeder Gruppe von n Studierenden studieren alle das gleiche Fach.

Induktionsanfang : $n = 1$. Die Aussage ist erfüllt, denn in einer Gruppe, die aus einer Person besteht, studieren alle Personen das gleiche.

Induktionsvoraussetzung: Die Aussage sei für alle $n \leq N$ mit einem festen, beliebigen $N \in \mathbb{N}$ wahr.

Induktionsschluß: Wir beweisen die Aussage für $n = N + 1$. Dazu betrachten wir eine Gruppe von $N + 1$ Personen, entfernen eine Person P1 aus der Gruppe. Dann besteht der Rest der Gruppe aus N Studierenden und diese studieren nach Voraussetzung alle das gleiche Fach. Nun nehmen wir P1 wieder dazu und lassen eine andere Person P2 fort. Dann besteht die Restgruppe wieder aus N Personen und diese studieren nach Voraussetzung alle das gleiche Fach. Also haben alle $N + 1$ Personen das gleiche Studienfach.

Abgabetermine: 18. - 22.11.2013