Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Prof. Dr. A. Iske
Dr. H. P. Kiani

WiSe 2013/14

Analysis I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 1

Aufgabe 1:

Zeigen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln die Gültigkeit folgender Äquivalenzen:

a)
$$((A \vee B) \wedge \neg(B \vee C)) \Longleftrightarrow (A \wedge \neg B \wedge \neg C)$$

b)
$$((A \wedge (B \vee C)) \Longleftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$$

Aufgabe 2:

a) Beweisen Sie folgende Aussagen indirekt oder widerlegen Sie die Aussagen mit Hilfe von Gegenbeispielen.

(i)
$$|\,2ab\,| \;\leq\; a^2 + b^2 \qquad \forall\, a,\, b \,\in\, \mathbb{R}\,.$$

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \;=\; n^2 - n + 1\,.$

b) Seien $x_0 \in \mathbb{R}$ und die Funktion $f\,:\,\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Verneinen Sie die Aussage

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0, \text{ so dass für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x - x_0| < \delta \text{ stets}$$
$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \text{ gilt }.$$

Aufgabe 3:

Für alle reellen Zahlen x, y und z gilt bekanntlich

$(x < y) \Longleftrightarrow (x + z < y + z)$ und $|x| + |y| \geq |x + y|$.

Seien nun a, b, c, d beliebige Zahlen aus $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Beweisen Sie folgende Aussagen direkt oder widerlegen Sie die Aussagen mit Hilfe von Gegenbeispielen.

a) $a > b, \ c > d \quad \Longleftrightarrow \quad a\,c > b\,d$,

b) $a > b, \ c > d \quad \Longrightarrow \quad a - d > b - c$,

c) $a < b \quad \Longleftrightarrow \quad \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$

d) $|a| - |b| \leq |a - b| \cdot$

Aufgabe 4:

a) Zu berechnen sei $\sin(0.2)$. Leider sind sämtliche elektronischen Geräte, die Ihnen bei der Berechnung behilflich sein könnten, ausgefallen. Sie erinnern sich aber, dass nahe Null

$$\sin(x) \approx x, \qquad \cos(x) \approx 1$$

gilt. Genauer gilt

$$|x - \sin(x)| \leq \left|\frac{x^3}{6}\right|, \qquad |1 - \cos(x)| \leq \left|\frac{x^2}{2}\right|.$$

Außerdem kennen Sie das Additionstheorem

$$\sin(2x) = 2\,\sin(x) \cdot \cos(x)\,.$$

Zeigen Sie mit Hilfe dieser Informationen, dass die folgenden Schranken für $\sin(0.2)$ gelten

$$0.1985 < \sin(0.2) < 0.2005\,.$$

b) Sie modellieren eine physikalische Größe $f(x)$ für $x \in [0.2, 0.5]$ durch $p(x)$. Als Modellierer garantieren Sie Ihrem Auftraggeber, dass für den maximalen absoluten Modellierungsfehler folgende Abschätzung gilt.

$$|A(x)| := |f(x) - p(x)| \leq \left|\frac{x^3 + \frac{1}{2}\,x + \sin(x^2)}{1000\left(x - \frac{1}{10}\right)^2}\right|$$

Der Auftraggeber behauptet, dass ihm das nicht gut genug sei, er könne nur einen maximalen Fehler von 0.15 tolerieren. Was halten Sie von dieser Aussage?

Abgabetermine: 4.11.- 8.11.2013