

ε - δ -Definition der Stetigkeit.

Beweis a) \Rightarrow b): Annahme: $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x_\delta \in D :$

$$\|x_\delta - x_0\| < \delta \quad \wedge \quad \|f(x_\delta) - f(x_0)\| \geq \varepsilon$$

Die Wahl $\delta = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) generiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \in D$ mit

$$\|x_n - x_0\| < \frac{1}{n} \quad \wedge \quad \|f(x_n) - f(x_0)\| \geq \varepsilon$$

Wegen $\|f(x_n) - f(x_0)\| \geq \varepsilon$ gilt

$$x_n \neq x_0 \quad \Longrightarrow \quad x_n \in D \setminus \{x_0\}$$

sowie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

Gleichzeitig konvergiert aber $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ nicht gegen $f(x_0) \Rightarrow$ **Widerspruch**.

ε - δ -Definition der Stetigkeit.

Beweis b) \Rightarrow a): Es gelte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \quad x_n \in D \setminus \{x_0\}$$

Wähle zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\forall x \in D : \|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

Sei nun $N = N(\varepsilon)$ mit

$$\forall n \geq N : \|x_n - x_0\| < \delta$$

Dann folgt direkt

$$\forall n \geq N : \|f(x_n) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

und somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Beispiele stetiger Funktionen.

- Konstante Funktionen $f : D \rightarrow W$, $f(x) = a \in W$ sind stetig.
- Die Identität $\text{id} : V \rightarrow V$, definiert durch $\text{id}(v) = v$ für alle $v \in V$, ist stetig.
- **Univariate Polynome**, $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$), der Form

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad a_k \in \mathbb{R} \text{ (oder } a_k \in \mathbb{C}\text{)}$$

sind stetig.

- **Multivariate Polynome**, d.h. Polynome in n reellen (oder komplexen) Variablen, $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $p : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$), der Form

$$p(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k_1=0}^{m_1} \dots \sum_{k_n=0}^{m_n} a_{k_1, \dots, k_n} \cdot x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$$

sind stetig.

Weitere Beispiele stetiger Funktionen.

- Die **Wurzelfunktion** $\sqrt[m]{x} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig auf $[0, \infty)$.
- Eine Potenzreihe, $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (oder $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$), der Form

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

ist auf dem Bereich, auf dem die Reihe **absolut** konvergiert, stetig.

- Sind die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ stetig im Punkt x_0 , so auch

$$f(x) + g(x), \quad \lambda \cdot f(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x_0) \neq 0).$$

- Die Komposition stetiger Funktionen ist wieder eine stetige Funktion.

Beispiel: $f(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$ ist auf ganz \mathbb{R}^2 stetig.

Eigenschaften stetiger Funktionen.

Satz: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen und beschränkten Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Dann gilt

a) **Existenz einer Nullstelle.**

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \implies \exists x_0 \in (a, b) : f(x_0) = 0$$

b) **Zwischenwertsatz.**

$$f(a) < c < f(b) \implies \exists x_0 \in (a, b) : f(x_0) = c$$

c) **Stetigkeit der Umkehrfunktion.** Ist $f(x)$ streng monoton wachsend, d.h. mit $x < y$ folgt $f(x) < f(y)$, so ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : [f(a), f(b)] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend.

d) **Min-Max-Eigenschaft.** Die Funktion f nimmt ihr Minimum und Maximum auf $[a, b]$ an, d.h. es gibt $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit

$$f(x_1) = \min_{x \in [a, b]} f(x) \quad f(x_2) = \max_{x \in [a, b]} f(x)$$

Wichtige Bemerkung:

Für die Gültigkeit der Min–Max–Eigenschaft ist es wesentlich, dass man ein **kompaktes** (d.h. abgeschlossenes und beschränktes) Intervall $[a, b]$ betrachtet.

Sonst gilt die Aussage im Allgemeinen nicht!!!

Gegenbeispiel:

Betrachte die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D = (0, \infty) \subset \mathbb{R}$ und

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{für } x \in D = (0, \infty)$$

Es gilt

$$D' = [0, \infty), \quad D \cap D' = (0, \infty)$$

Die Funktion ist auf ganz D stetig, nimmt aber weder Minimum noch Maximum auf D an.

Min–Max–Eigenschaft für multivariate Funktionen.

Definition: Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **kompakt (folgenkompakt)**, falls jede Folge $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $\mathbf{x}_k \in D$, eine **in der Menge D** konvergente Teilfolge

$$\mathbf{x}_{k_j} \rightarrow \mathbf{x}_0 \in D \quad (j \rightarrow \infty)$$

besitzt.

Satz: Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und ist die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf D , so nimmt f auf D Minimum und Maximum an, d.h. es gibt Punkte $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D$ mit

$$f(\mathbf{x}_1) = \min_{\mathbf{x} \in D} f(\mathbf{x}) \quad f(\mathbf{x}_2) = \max_{\mathbf{x} \in D} f(\mathbf{x})$$

Merkregel:

Eine stetige Funktion nimmt auf einem Kompaktum ihr Minimum und Maximum an.

Kriterien für Kompaktheit.

Satz: Für eine Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:

- a) D ist kompakt.
- b) D ist abgeschlossen und beschränkt.
- c) **Heine–Borel–Überdeckung.** Jede offene Überdeckung von D besitzt eine **endliche** Teilüberdeckung, d.h. es gilt

$$D \subset \bigcup_{i \in I} U_i, \quad U_i \text{ offen} \quad \Rightarrow \quad \exists i_1, \dots, i_k \in I : D \subset \bigcup_{j=1}^k U_{i_j}$$

Beispiel: Die Einheitssphäre S^{n-1} in \mathbb{R}^n bezüglich der Norm $\|\cdot\|$,

$$S^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| = 1\},$$

ist kompakt.

Gleichmäßige Stetigkeit.

Definition: Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **gleichmäßig stetig**, falls gilt: $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in D :$

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \implies \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$$

Satz:

Jede stetige Funktion auf einem Kompaktum D ist gleichmäßig stetig.

Bemerkung:

Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ gleichmäßig stetig auf D , so ist f stetig auf D .

Beispiele:

- $f(x) = 1/x$ ist stetig auf $(0, \infty)$, aber nicht gleichmäßig stetig auf $(0, \infty)$.
- $f(x) = \exp(x)$ ist stetig auf \mathbb{R} , aber nicht gleichmäßig stetig auf \mathbb{R} .
- $f(x) = \sin(x)$ ist stetig auf \mathbb{R} und sogar gleichmäßig stetig auf \mathbb{R} .

4.2. Differentialrechnung einer Variablen

Zunächst:

Einleitung auf Folie bzw. an der Tafel

Sekantensteigung und Differenzenquotient

liefern im Grenzwert

Tangentensteigung und Ableitung
(Differentialquotient)

4.2. Differentialrechnung einer Variablen

Definition: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in D \cap D'$ gegeben.

1) Für ein $x \in D$, $x \neq x_0$ nennt man den Ausdruck

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Differenzenquotient bzw. Sekantensteigung von f bezüglich x .

2) Die Funktion $f(x)$ heißt differenzierbar in x_0 , falls der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. In diesem Fall nennt man den Grenzwert Ableitung oder Differentialquotient der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 und schreibt

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

4.2. Differentialrechnung einer Variablen

Definition: (Fortsetzung)

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in D \cap D'$ gegeben.

3) Dann heißen die einseitigen Grenzwerte

$$f'(x_0^+) := \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0^-) := \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

rechtsseitige bzw. linksseitige Ableitung von f bei x_0 .

Bemerkung:

Falls f in x_0 differenzierbar ist, so stimmen die rechtsseitige und linksseitige Ableitung von f bei x_0 überein.

Eine Interpretation der Ableitung einer Funktion.

Die Bewegung eines Massenpunktes sei beschrieben durch eine Funktion

$$c : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad c = c(t), \quad I \subset \mathbb{R}$$

wobei t die Zeit und $c(t)$ den Ort des Massenpunktes bezeichnet.

Dann ist die Ableitung

$$\dot{c}(t_0) := \frac{dc}{dt}(t_0) := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{c(t) - c(t_0)}{t - t_0}$$

die **Geschwindigkeit**, mit der sich der Massenpunkt bewegt.

In $\Delta t = t - t_0$ legt der Massenpunkt die Strecke $\Delta c = c(t) - c(t_0)$ zurück; die *mittlere Geschwindigkeit* beträgt

$$\frac{\Delta c}{\Delta t} = \frac{c(t) - c(t_0)}{t - t_0}$$

Beispiel: Ableitung von Monomen.

Betrachte die **Monomfunktion** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, für $n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt

$$x^n - x_0^n = (x - x_0) \sum_{j=0}^{n-1} x^{n-1-j} x_0^j$$

und somit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{j=0}^{n-1} x^{n-1-j} x_0^j = n x_0^{n-1}$$

Fazit: Die Funktion $f(x) = x^n$ ist auf ganz \mathbb{R} differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = n x^{n-1}, \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

für die (erste) Ableitung von f .

Bemerkung: Für eine konstante Funktion $f(x) = c$ gilt $f'(x) = 0$.

Weitere Beispiele zur Ableitung von Funktionen.

Linearität der Ableitung.

Sind die beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ differenzierbar, so sind auch

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{und} \quad (\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

differenzierbare Funktionen, und es gilt

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) \quad \text{und} \quad (\lambda f)'(x) = \lambda \cdot f'(x)$$

Ableitung von Polynomen.

Sei $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein **Polynom**, d.h. p hat die Form

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad \text{mit Koeffizienten } a_k \in \mathbb{R}, 0 \leq k \leq n$$

Dann ist die (erste) Ableitung von p gegeben durch

$$\frac{d}{dx} p(x) = \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right) = \sum_{k=1}^n a_k k x^{k-1}$$

Ableitungen einiger elementarer Funktionen.

Funktion	Ableitung	Parameter
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R}, x > 0$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Ableitung von vektorwertigen Funktionen.

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}$, eine **vektorwertige** Funktion, d.h. f hat die Form

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))^T \in \mathbb{R}^m, \quad \text{für } x \in D.$$

Dann wird die Ableitung von f *komponentenweise* berechnet, d.h. es gilt

$$f'(x) = (f'_1(x), \dots, f'_m(x))^T \in \mathbb{R}^m, \quad \text{für } x \in D.$$

Beispiele:

$$f(x) = (x, e^x, \sin x)^T \Rightarrow f'(x) = (1, e^x, \cos x)^T$$

$$f(x) = (\cos x, \sin x)^T \Rightarrow f'(x) = (-\sin x, \cos x)^T$$

Aus Differenzierbarkeit folgt Stetigkeit.

Satz: Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, in $x_0 \in D^0$ differenzierbar, so ist f in x_0 stetig.

Beweis: Sei f in x_0 differenzierbar. Dann folgt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0)) = 0$$

unmittelbar aus der Voraussetzung

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Wegen $\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)f'(x_0) = 0$ folgt schließlich

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

d.h. die Funktion f ist in x_0 stetig.

Wichtige Differentiationsregeln.

Satz: Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, in $x_0 \in D^0$ differenzierbare Funktionen. Dann gelten die folgenden Differentiationsregeln.

a) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g$ in x_0 differenzierbar, und es gilt

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

b) Die Funktion $f \cdot g$ ist in x_0 differenzierbar, und es gilt die **Produktregel**

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

c) Ist $g(x_0) \neq 0$, so ist die Funktion $f(x)/g(x)$ in x_0 differenzierbar, und es gilt die **Quotientenregel**

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$