Das Newton–Verfahren.

Ziel: Bestimme eine Nullstelle einer *differenzierbaren* Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Verwende die Newton–Iteration:

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{für } f'(x_n) \neq 0$$

mit Startwert x_0.

Das Verfahren *konvergiert*, falls x_0 nahe bei einer Nullstelle von f liegt.

Beispiel: Für $f(x) = x^2 - 2$ und $x_0 = 1$ erhält man

n	0	1	2	3	4	...
x_n	1.0000	1.5000	1.41667	1.4142 15686	1.4142 13562	...

Erinnerung: $f(\sqrt{2}) = 0$, d.h. $\sqrt{2} = 1.4142\,13562\ldots$ ist Nullstelle von f.

Konvergenz von Folgen.

Definition:
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem normierten Vektorraum V. Dann heißt

- $(a_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ für $n_j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq n_1 < n_2 < \ldots$ Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, falls es ein $C > 0$ gibt mit
$$\forall\, n \in \mathbb{N} \;:\; \|a_n\| \leq C$$
- die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert (Limes) $a \in V$, falls
$$\forall\, \varepsilon > 0 \;:\; \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;:\; \forall\, n \geq N \;:\; \|a_n - a\| < \varepsilon$$
Eine nicht–konvergente Folge heißt divergent.
- die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy–Folge, falls
$$\forall\, \varepsilon > 0 \;:\; \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;:\; \forall\, n, m \geq N \;:\; \|a_n - a_m\| < \varepsilon$$

Konvergenz von Folgen.

Satz: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem normierten Vektorraum. Dann gilt:

a) (a_n) konvergent $\Rightarrow$ (a_n) beschränkt;

b) (a_n) konvergent $\Rightarrow$ (a_n) Cauchy–Folge;

c) Falls (a_n) konvergiert, so ist der Grenzwert eindeutig bestimmt.

Beweis von a): Sei (a_n) konvergent mit Grenzwert a. Dann gilt für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ die Abschätzung

$$\|a_n\| = \|a_n - a + a\| \leq \|a_n - a\| + \|a\| < \varepsilon + \|a\| \quad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon)$$

Damit ist die Folge (a_n) beschränkt mit der Konstanten

$$C := \max\{\|a_1\|, \|a_2\|, \ldots, \|a_{N-1}\|, \|a\| + \varepsilon\}$$

Also

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \;:\; \|a_n\| \leq C$$

Konvergenz von Folgen.

Beweis von b): Sei (a_n) konvergent mit Grenzwert a. Dann gilt für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|a_n - a_m\| &= \|a_n - a + a - a_m\| \\ &\leq \|a_n - a\| + \|a_m - a\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $n, m \geq N = N(\varepsilon/2)$.

Beweis von c): Sei (a_n) konvergent mit verschiedenen Grenzwerten a und $\bar{a}$, $a \neq \bar{a}$. Dann gelten für $\varepsilon > 0$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|a_n - a\| < \varepsilon \quad & \text{für alle } n \geq N(\varepsilon) \\ \|a_n - \bar{a}\| < \varepsilon \quad & \text{für alle } n \geq \overline{N}(\varepsilon) \end{aligned}$$

Somit folgt für $n \geq \max\{N(\varepsilon), \overline{N}\varepsilon)\}$ die Ungleichung

$$\|a - \bar{a}\| = \|a - a_n + a_n - \bar{a}\| \leq \|a_n - a\| + \|a_n - \bar{a}\| < 2\varepsilon$$

Da dies für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, folgt $a = \bar{a}$ im Widerspruch zu $a \neq \bar{a}$.

Bemerkungen zur Konvergenz von Folgen.

Notation: Für eine konvergente Folge (a_n) mit Grenzwert schreiben wir

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{oder} \qquad a_n \to a \;\; (n \to \infty)$$

Uneigentliche Konvergenz ...

...bzw. Divergenz gegen den uneigentlichen Grenzwert $\pm\infty$.

Für reelle Folgen definieren wir zusätzlich

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, C > 0 : \exists\, N \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq N : \; a_n > C$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, C > 0 : \exists\, N \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq N : \; a_n < -C$$

Vollständige Räume bzw. Banachräume, Hilberträume.

Bemerkung.
Die Umkehrung der Aussage im Satz, Teil b),

$$(a_n) \text{ Cauchyfolge} \quad \Longrightarrow \quad (a_n) \text{ konvergent}$$

gilt nur in *gewissen* normierten Räumen, nämlich in

vollständigen Räumen bzw. Banachräumen.

Einen vollständigen *Euklidischen Vektorraum* nennt man auch

Hilbertraum.

Beispiele:

- für vollständige Räume: $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(\mathbb{C}, |\cdot|)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, $(\mathcal{C}[a,b], \|\cdot\|_\infty)$;
- für einen nicht vollständigen Raum: $(\mathcal{C}[a,b], \|\cdot\|_2)$.

Rechnen mit konvergenten Folgen.

Satz: Seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen. Dann konvergieren die beiden Folgen $(a_n + b_n)$ und (λa_n) für $\lambda \in \mathbb{R}$ (bzw. $\lambda \in \mathbb{C}$), wobei gilt

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (\lambda a_n) = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Beweis: Sei $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

a) Für $n \geq \max\{N_1(\varepsilon/2), N_2(\varepsilon/2)\}$ gilt

$$\|(a_n + b_n) - (a + b)\| \leq \|a_n - a\| + \|b_n - b\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

b) Sei $\lambda \neq 0$. Dann gilt für $n \geq N_1(\varepsilon/|\lambda|)$ die Abschätzung

$$\|\lambda a_n - \lambda a\| = |\lambda| \cdot \|a_n - a\| < |\lambda| \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$$

Der Fall $\lambda = 0$ ist trivial.

Die Konvergenzgeschwindigkeit einer Folge.

Definition: Sei (a_n) eine konvergente Folge mit Grenzwert a.

a) Die Folge (a_n) heißt (mindestens) linear konvergent, falls eine Konstante $0 < C < 1$ und ein Index $N \in \mathbb{N}$ existiert mit:

$$\forall\, n \geq N : \; \|a_{n+1} - a\| \leq C\|a_n - a\|$$

b) Die Folge (a_n) heißt (mindestens) superlinear konvergent, falls es eine nicht–negative Nullfolge $C_n \geq 0$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = 0$ gibt, so dass

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \; \|a_{n+1} - a\| \leq C_n\|a_n - a\|$$

c) Die Folge (a_n) heißt konvergent mit der Ordnung (mindestens) $p > 1$, falls es eine nicht–negative Konstante $C \geq 0$ gibt, so dass

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \; \|a_{n+1} - a\| \leq C\|a_n - a\|^p$$

3.3. Konvergenzkriterien für reelle Folgen

Definition: Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt

monoton wachsend $\iff \forall\, n < m: \; a_n \leq a_m$

streng monoton wachsend $\iff \forall\, n < m \; : \; a_n < a_m$

nach oben beschränkt $\iff \exists\, C \in \mathbb{R}: \; \forall n: \; a_n \leq C$

Analog definiert man die Begriffe

monoton fallend $\iff \forall\, n < m: \; a_n \geq a_m$

streng monoton fallend $\iff \forall\, n < m \; : \; a_n > a_m$

nach unten beschränkt $\iff \exists\, C \in \mathbb{R}: \; \forall n: \; a_n \geq C$

Satz: Eine monoton wachsende, nach oben beschränkte reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$$

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt. Dann gilt

$$s := \sup\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} < \infty$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $N = N(\varepsilon)$ mit

$$s - \varepsilon < a_N \leq s$$

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend, also folgt

$$s - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq s \quad \forall\, n \geq N$$

d.h.

$$|s - a_n| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N(\varepsilon)$$

Folgerung: Prinzip der Intervallschachtelung.

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende reelle Folge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende reelle Folge mit

$$a_n \leq b_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \quad \text{(Intervallschachtelung)}$$

Dann sind beide Folgen konvergent. Gilt weiterhin

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$$

so haben $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ denselben Grenzwert, d.h. es gibt ein $\xi \in \mathbb{R}$ mit

$$\xi = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

Weiterhin gelten in diesem Fall die Fehlerabschätzungen

$$|a_n - \xi| \leq |b_n - a_n| \qquad |b_n - \xi| \leq |b_n - a_n|$$

Beispiel: Prinzip der Intervallschachtelung.

Definiere für $0 < a < b$ zwei Folgen (a_n) und (b_n) *rekursiv* durch

$$a_0 := a \qquad b_0 := b$$

$$a_{n+1} := \sqrt{a_n b_n} \qquad b_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2}$$

Die Folgen (a_n) und (b_n) bilden eine *Intervallschachtelung*, und es gilt

$$(b_{n+1} - a_{n+1}) \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n)$$

Der gemeinsame Grenzwert von (a_n) und (b_n)

$$\mathrm{agm}(a, b) := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

heißt arithmetisch–geometrisches Mittel von a und b.

Bernoullische Ungleichung und die geometrische Folge.

Es gilt

$$\forall\, x \geq -1,\ n \in \mathbb{N}:\ (1+x)^n \geq 1 + nx$$

wobei Gleichheit nur bei $n = 1$ oder $x = 0$ gilt.

Die Geometrische Folge.
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ relle Folge mit $a_n = q^n$ für $q \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
q > 1 \quad &: \quad \lim_{n\to\infty} q^n = +\infty \quad (q^n = (1+(q-1))^n \geq 1 + n(q-1)) \\
q = 1 \quad &: \quad \lim_{n\to\infty} q^n = 1 \\
0 < q < 1 \quad &: \quad \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad \left(q^n = \tfrac{1}{(1+(1/q-1))^n} \leq \tfrac{1}{1+n(1/q-1)}\right) \\
-1 < q \leq 0 \quad &: \quad \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad (|q^n| = |q|^n) \\
q = -1 \quad &: \quad (q^n) \quad \text{beschränkt, aber nicht konvergent} \quad (q^n \in \{-1, 1\}) \\
q < -1 \quad &: \quad (q^n) \quad \text{divergent, kein uneigentlicher Grenzwert}
\end{aligned}$$

Weitere Rechenregeln für konvergente Folgen.

Satz: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente reelle Folgen. Dann gilt

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim\limits_{n\to\infty} b_n)$

b) $\forall\, n\ :\ b_n \neq 0 \wedge \lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$

c) $\forall\, n\ :\ a_n \geq 0 \wedge m \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$

Beweis zu a): Für hinreichend große n gilt

$$\begin{aligned}
|a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\
&\leq |a_n| \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| \\
&\leq C_a \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a| < (C_a + |b|)\varepsilon
\end{aligned}$$

Für b) und c) siehe Textbuch von Ansorge/Oberle.

Beispiele für die Rechenregeln konvergenter Folgen.

Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \sqrt{n^2+5n+1} - n$$

Es gilt

$$(n^2+5n+1) - n^2 = \left(\sqrt{n^2+5n+1} - n\right)\left(\sqrt{n^2+5n+1} + n\right)$$

woraus folgt

$$a_n = \frac{(n^2+5n+1)-n^2}{\sqrt{n^2+5n+1}+n} = \frac{5+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{5+0}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{5}{2}$$

Beispiele für die Rechenregeln konvergenter Folgen.

Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \left(1+\frac{p}{n}\right)^n$$

Kapitalverzinsung: Anfangskapital K_0, Jahreszinssatz p

$$\begin{array}{lcll}
K_1 & = & K_0(1+p) & \text{jährlich} \\
K_2 & = & K_0\left(1+\frac{p}{2}\right)^2 & \text{halbjährlich} \\
K_4 & = & K_0\left(1+\frac{p}{4}\right)^4 & \text{vierteljährlich} \\
K_{10} & = & K_0\left(1+\frac{p}{10}\right)^{10} & \text{monatlich} \\
K_{360} & = & K_0\left(1+\frac{p}{360}\right)^{360} & \text{täglich}
\end{array}$$

Untersuche die Konvergenz der Folge (a_n), also

$$\lim_{n\to\infty} a_n \quad = \quad ?$$

Beispiele für die Rechenregeln konvergenter Folgen.

Für $p > 0$ zeigt man, dass

a) die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton wachsend ist,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

b) die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt ist,

$$\left(1+\frac{p}{n}\right)^n \leq 4^l \quad (\text{wobei } l \in \mathbb{N} \text{ mit } l \geq p)$$

Damit konvergiert die Folge und für den Grenzwert erhält man

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^p$$

Die Grenzwertformel gilt auch für negative p und als Spezialfall erhalten wir die Eulersche Zahl,

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2.7182\,81828\,\ldots$$

Das Cauchysche Konvergenzkriterium.

Satz: (Cauchysches Konvergenzkriterium)
Der Vektorraum $\mathbb{R}$ ist vollständig, d.h. jede reelle Cauchyfolge ist konvergent.

Zur Erinnerung:

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem normierten Vektorraum V. Dann heißt

- die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy–Folge, falls

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \ \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \ \forall\, n, m \geq N : \ \|a_n - a_m\| < \varepsilon$$

Für den Beweis des Cauchyschen Konvergenzkriteriums benötigen wir

a) das Prinzip der Häufungspunkte von Folgen,

b) den Satz von Bolzano und Weierstraß.