

## 2.3. Reelle Zahlen

Erweiterung des Zahlenbereichs der natürlichen Zahlen

- Ganze Zahlen

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

- Rationale Zahlen

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Beachte:  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

Aber: Die Zahl  $\sqrt{2}$  läßt sich beliebig genau durch eine rationale Zahl aus  $\mathbb{Q}$  approximieren, d.h. zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $q \in \mathbb{Q}$  mit

$$|\sqrt{2} - q| < \varepsilon$$

## Axiomensystem für die reellen Zahlen.

(I) **Regeln der Addition** ( $(\mathbb{R}, +)$  ist eine **Abelsche Gruppe**):

(a)  $x + (y + z) = (x + y) + z$

(b)  $x + y = y + x$

(c)  $x + 0 = 0 + x = x$

(d)  $x + (-x) = (-x) + x = 0$

(II) **Regeln der Multiplikation** ( $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$  **Abelsche Gruppe**):

(a)  $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

(b)  $x \cdot y = y \cdot x$

(c)  $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$

(d)  $x \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right) \cdot x = 1 \quad (x \neq 0)$

(III) **Distributivgesetz** (Regeln (I)–(III): **Körperaxiome**):

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

# Weitere Axiome für die reellen Zahlen.

## (IV) Ordnungseigenschaften

- (a)  $x \leq y \vee y \leq x$
- (b)  $x \leq x$
- (c)  $(x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow x = y$
- (d)  $(x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow x \leq z$
- (e)  $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$
- (f)  $(x \leq y \wedge z \geq 0) \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$

## (V) Vollständigkeitsaxiom (Dedekind, 1872)

Sei  $\mathbb{R} = L \cup R$  zerlegt in nichtleere Mengen mit  $\forall x \in L, y \in R : x < y$ .  
Dann gibt es genau eine **Schnittzahl**  $s \in \mathbb{R}$  mit

$$\forall x \in L, y \in R : (x \leq s \leq y)$$



# Eine Bemerkung und Rechnen mit Ungleichungen.

**Bemerkung:** Die Menge der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  erfüllt nicht das Vollständigkeitsaxiom (V). Denn für

$$L := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2 \vee x < 0\}$$

$$R := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 > 2 \wedge x > 0\}$$

gibt es keine Schnittzahl. Diese wäre  $x = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

Weitere Regeln beim **Rechnen mit Ungleichungen** (mit den Axiomen (IV))

- (1)  $x \leq y \Rightarrow -x \geq -y$
- (2)  $(x \leq y \wedge z \leq 0) \Rightarrow x \cdot z \geq y \cdot z$
- (3)  $x^2 \geq 0$
- (4)  $(x \leq y \wedge u \leq v) \Rightarrow x + u \leq y + v$
- (5)  $(0 \leq x \leq y \wedge 0 \leq u \leq v) \Rightarrow x \cdot u \leq y \cdot v$



# Der Betrag einer reellen Zahl.

**Definition:** Zu  $a \in \mathbb{R}$  heißt

$$|a| := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

der **Betrag** von  $a$ . Zu  $a, b \in \mathbb{R}$  heißt  $|a - b|$  der (nichtnegative) **Abstand** der Zahlen  $a$  und  $b$ .

**Eigenschaften:**

- (1)  $|a| \geq 0$
- (2)  $|a| = 0 \Rightarrow a = 0$
- (3)  $|ab| = |a| |b|$
- (4)  $|a + b| \leq |a| + |b|$  (**Dreiecksungleichung**)
- (5)  $U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}$  ( $\varepsilon > 0$ )  
 $= (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  ( $\varepsilon$ -Umgebung von  $a$ )



# Obere und untere Schranke, Supremum und Infimum.

**Definition:** Sei  $M \subset \mathbb{R}$  eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$ .

- 1) Die Zahl  $x \in \mathbb{R}$  heißt **obere Schranke** von  $M$ , falls gilt:

$$\forall w \in M : w \leq x$$

Analog definiert man den Begriff **untere Schranke** von  $M$ .

- 2) Die Menge  $M$  heißt **nach oben** (bzw. **nach unten**) **beschränkt**, falls es eine obere (bzw. untere) Schranke von  $M$  gibt.
- 3) Die Zahl  $s \in \mathbb{R}$  heißt **Supremum von  $M$** , mit Notation

$$s = \sup M = \sup(M),$$

falls  $s$  die kleinste obere Schranke von  $M$  ist, d.h.

- $s$  ist eine obere Schranke von  $M$
- für jede beliebige obere Schranke  $x$  von  $M$  gilt:  $s \leq x$

Analog definiert man den Begriff **Infimum von  $M$** .



## Beispiele zu Supremum und Infimum.

**Beispiel:** Betrachte das Intervall  $I = [1, 2) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 2\}$   
Dann ist

- jede Zahl  $x \geq 2$  eine obere Schranke von  $I$ ,
- jede Zahl  $x \leq 1$  eine untere Schranke von  $I$ .

Also gilt

$$\sup [1, 2) = 2 \quad \inf [1, 2) = 1$$

**Beispiel:** Betrachte die Menge  $M \subset \mathbb{R}$  definiert durch

$$M := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}, \frac{9}{20}, \frac{11}{30}, \dots \right\}$$

Dann gilt

$$\sup M = \frac{3}{2} \quad \inf M = 0$$

## Zur Existenz eines Supremums und Infimums.

**Satz:** Jede nichtleere, nach oben (bzw. unten) beschränkte Menge  $M \subset \mathbb{R}$  besitzt ein Supremum (bzw. Infimum).

**Beweis:** Mit Hilfe des Vollständigkeitsaxioms.

**Folgerungen:**

- 1) Die Menge  $\mathbb{N}$  der natürlichen Zahlen ist nicht nach oben beschränkt.
- 2) Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt:

$$x > 0 \quad \Rightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N} : 0 < \frac{1}{n} < x$$

- 3) Zwischen zwei reellen Zahlen  $x < y$  gibt es immer (unendlich viele) rationale Zahlen.

## 3.1. Normierte Vektorräume

### Definition:

Sei  $V$  ein Vektorraum (oder linearer Raum) über (dem Körper)  $\mathbb{R}$ .

Eine Abbildung  $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$  heißt **Norm** auf  $V$ , falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind.

$$N1) \quad \|v\| = 0 \iff v = 0 \quad (\text{Definitheit}).$$

$$N2) \quad \|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R}, v \in V \quad (\text{Homogenität}).$$

$$N3) \quad \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \text{für alle } v, w \in V \quad (\text{Dreiecksungleichung}).$$

$V$  zusammen mit  $\|\cdot\|$  heißt dann **normierter Vektorraum**.

## Beispiele für normierte Vektorräume.

- $\mathbb{R}$  mit der Betragsfunktion  $|\cdot|$  ist ein normierter Vektorraum.
- Für  $n \geq 1$  ist der  $\mathbb{R}^n$ , zusammen mit der  **$p$ -Norm**,  $p \in \mathbb{N}$ ,

$$\|x\|_p = \left( \sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p} \quad \text{für } x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n,$$

ein normierter Vektorraum.

**Spezialfall:** Für  $p = 2$  bekommt man die **Euklidische Norm**

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2} \quad \text{für } x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

**Weiterhin** ( $p = \infty$ ): Die **Maximumnorm**

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \quad \text{für } x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

## 3.2. Folgen

**Definition:** Sei  $V$  ein normierter Vektorraum mit Norm  $\|\cdot\|$ . Eine **Folge** ist eine Abbildung  $\mathbb{N} \rightarrow V, n \mapsto a_n$ , kurz  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  oder  $(a_n)_{n \geq 1}$ .

### Beispiele für Folgen.

- Reelle Folgen (Folgen reeller Zahlen), d.h.  $V = \mathbb{R}$ , z.B. ist

$$a_n = \frac{1}{n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

eine reelle Folge.

- Komplexe Folgen (Folgen komplexer Zahlen), d.h.  $V = \mathbb{C}$ , z.B. ist

$$a_n = i^n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

eine komplexe Folge.

## 3.2. Folgen

### Weitere Beispiele für Folgen.

- Vektorenfolgen (Folgen von Vektoren), d.h.  $V = \mathbb{R}^d$  oder  $V = \mathbb{C}^d$ , z.B. ist

$$a_n = \left( \frac{1}{n}, n, \frac{1}{n^2} \right) \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ und } d = 3$$

eine Folge reeller Vektoren.

- Funktionenfolgen (Folgen von Funktionen), etwa  $V = \mathcal{C}[a, b]$ , z.B. ist für  $[a, b] = [0, 1]$  die Folge

$$f_n(x) = x^n \quad \text{für } x \in [0, 1] \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

eine Funktionenfolge.

**Bemerkung:** Wir bezeichnen mit  $\mathcal{C}[a, b]$  die Menge der stetigen reellwertigen Funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

## 3.2. Folgen

### Rechenoperationen mit Folgen.

Die Menge aller Folgen in  $V$  bildet einen Vektorraum  $V^{\mathbb{N}}$ , für den die *Addition* und *skalare Multiplikation* wie folgt definiert sind.

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} + (b_n)_{n \in \mathbb{N}} := (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\lambda(a_n)_{n \in \mathbb{N}} := (\lambda a_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

### Rekursion und Iteration.

Folgen lassen sich **rekursiv** beschreiben durch

$$a_{n+1} := \Phi(n, a_n) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

wobei  $\Phi : \mathbb{N} \times V \rightarrow V$

eine bestimmte **Iterationsvorschrift** bezeichnet.

## Das Bisektionsverfahren (Intervallhalbierung).

- **Ziel:** Bestimme eine Nullstelle einer stetigen Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .
- **Voraussetzung:**  $f(a) \cdot f(b) < 0$ .
- **Iteration:** Definiere zwei Folgen  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  und  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  rekursiv mit den Startwerten  $(u_0, v_0) = (a, b)$  und der Iterationsvorschrift.

FOR  $n = 1, 2, \dots$

$$x := (u_{n-1} + v_{n-1})/2;$$

IF  $f(x) = 0$  THEN RETURN

IF  $(f(x) \cdot f(v_{n-1}) < 0)$  THEN

$$u_n := x; \quad v_n := v_{n-1};$$

ELSE

$$u_n := u_{n-1}; \quad v_n := x;$$

**OUTPUT:**  $x$  mit  $f(x) = 0$ , Nullstelle von  $f$  in  $[a, b]$ .

## Beispiel zum Bisektionsverfahren.

Betrachte die Funktion  $f(x) = x^2 - 2$  auf dem Intervall  $[1, 2]$ .

Die gesuchte Nullstelle liegt bei  $x = \sqrt{2} = 1.4142\ 13562\dots$

$n$	$u_n$	$v_n$
0	1.0000 00000	2.0000 00000
1	1.0000 00000	1.5000 00000
2	1.2500 00000	1.5000 00000
3	1.3750 00000	1.5000 00000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10	1.4140 62500	1.4150 39063
20	1.4142 13181	1.4142 14134
30	1.4142 13562	1.4142 13562
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

**Beobachtung:** Das Bisektionsverfahren konvergiert relativ langsam!