2.3. Reelle Zahlen

Erweiterung des Zahlenbereichs der natürlichen Zahlen

- Ganze Zahlen

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

- Rationale Zahlen

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Beachte: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Aber: Die Zahl $\sqrt{2}$ läßt sich beliebig genau durch eine rationale Zahl aus $\mathbb{Q}$ *approximieren*, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $q \in \mathbb{Q}$ mit

$$|\sqrt{2} - q| < \varepsilon$$

Axiomensystem für die reellen Zahlen.

(I) **Regeln der Addition** ($(\mathbb{R},+)$ ist eine Abelsche Gruppe):

$$
\begin{array}{llcccc}
\text{(a)} & x+(y+z) & = & (x+y)+z & & \\
\text{(b)} & x+y & = & y+x & & \\
\text{(c)} & x+0 & = & 0+x & = & x \\
\text{(d)} & x+(-x) & = & (-x)+x & = & 0
\end{array}
$$

(II) **Regeln der Multiplikation** ($(\mathbb{R}\setminus\{0\},+)$ Abelsche Gruppe):

$$
\begin{array}{llccccl}
\text{(a)} & x\cdot(y\cdot z) & = & (x\cdot y)\cdot z & & & \\
\text{(b)} & x\cdot y & = & y\cdot x & & & \\
\text{(c)} & x\cdot 1 & = & 1\cdot x & = & x & \\
\text{(d)} & x\cdot\left(\frac{1}{x}\right) & = & \left(\frac{1}{x}\right)\cdot x & = & 1 & (x\neq 0)
\end{array}
$$

(III) **Distributivgesetz** (Regeln (I)–(III): Körperaxiome):

$$x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$$

Weitere Axiome für die reellen Zahlen.

(IV) Ordnungseigenschaften

$$
\begin{array}{ll}
\text{(a)} & x \leq y \lor y \leq x \\
\text{(b)} & x \leq x \\
\text{(c)} & (x \leq y \land y \leq x) \Rightarrow x = y \\
\text{(d)} & (x \leq y \land y \leq z) \Rightarrow x \leq z \\
\text{(e)} & x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z \\
\text{(f)} & (x \leq y \land z \geq 0) \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z
\end{array}
$$

(V) Vollständigkeitsaxiom (Dedekind, 1872)

Sei $\mathbb{R} = L \cup R$ zerlegt in nichtleere Mengen mit $\forall x \in L, y \in R : x < y$. Dann gibt es genau eine Schnittzahl $s \in \mathbb{R}$ mit

$$\forall x \in L, y \in R : \quad (x \leq s \leq y)$$

Eine Bemerkung und Rechnen mit Ungleichungen.

Bemerkung: Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ erfüllt nicht das Vollständigkeitsaxiom (V). Denn für

$$\begin{aligned} L &:= \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2 \vee x < 0\} \\ R &:= \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 > 2 \wedge x > 0\} \end{aligned}$$

gibt es keine Schnittzahl. Diese wäre $x = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Weitere Regeln beim Rechnen mit Ungleichungen (mit den Axiomen (IV))

$$\begin{array}{ll} (1) & x \leq y \Rightarrow -x \geq -y \\ (2) & (x \leq y \wedge z \leq 0) \Rightarrow x \cdot z \geq y \cdot z \\ (3) & x^2 \geq 0 \\ (4) & (x \leq y \wedge u \leq v) \Rightarrow x + u \leq y + v \\ (5) & (0 \leq x \leq y \wedge 0 \leq u \leq v) \Rightarrow x \cdot u \leq y \cdot v \end{array}$$

Der Betrag einer reellen Zahl.

Definition: Zu $a \in \mathbb{R}$ heißt

$$|a| := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

der Betrag von a. Zu $a, b \in \mathbb{R}$ heißt $|a - b|$ der (nichtnegative) Abstand der Zahlen a und b.

Eigenschaften:

(1) $\quad |a| \geq 0$

(2) $\quad |a| = 0 \;\Rightarrow\; a = 0$

(3) $\quad |ab| = |a|\,|b|$

(4) $\quad |a + b| \leq |a| + |b| \quad$ (Dreiecksungleichung)

(5) $\quad U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\} \quad (\varepsilon > 0)$

$\qquad\qquad = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \quad$ (ε–Umgebung von a)

Obere und untere Schranke, Supremum und Infimum.

Definition: Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$.

1) Die Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt obere Schranke von M, falls gilt:

$$\forall\, w \in M : \; w \leq x$$

Analog definiert man den Begriff untere Schranke von M.

2) Die Menge M heißt nach oben (bzw. nach unten) beschränkt, falls es eine obere (bzw. untere) Schranke von M gibt.

3) Die Zahl $s \in \mathbb{R}$ heißt Supremum von M, mit Notation

$$s = \sup_{x \in M} M = \sup(M),$$

falls s die kleinste obere Schranke von M ist, d.h.

- s ist eine obere Schranke von M
- für jede beliebige obere Schranke x von M gilt: $s \leq x$

Analog definiert man den Begriff Infimum von M.

Beispiele zu Supremum und Infimum.

Beispiel: Betrachte das Intervall $I = [1,2) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 2\}$
Dann ist

- jede Zahl $x \geq 2$ eine obere Schranke von I,
- jede Zahl $x \leq 1$ eine untere Schranke von I.

Also gilt

$$\sup\,[1,2) = 2 \qquad \inf\,[1,2) = 1$$

Beispiel: Betrachte die Menge $M \subset \mathbb{R}$ definiert durch

$$M := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1},\;\; n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}, \frac{9}{20}, \frac{11}{30}, \ldots \right\}$$

Dann gilt

$$\sup M = \frac{3}{2} \qquad \inf M = 0$$

Zur Existenz eines Supremums und Infimums.

Satz: Jede nichtleere, nach oben (bzw. unten) beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum (bzw. Infimum).

Beweis: Mit Hilfe des Vollständigkeitsaxioms.

Folgerungen:

1) Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist nicht nach oben beschränkt.
2) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x > 0 \quad \Rightarrow \quad \exists\, n \in \mathbb{N} \,:\, 0 < \frac{1}{n} < x$$

3) Zwischen zwei reellen Zahlen $x < y$ gibt es immer (unendlich viele) rationale Zahlen.

3.1. Normierte Vektorräume

Definition:

Sei V ein Vektorraum (oder linearer Raum) über (dem Körper) $\mathbb{R}$.

Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$ heißt Norm auf V, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind.

N1) $\|v\| = 0 \iff v = 0$ (Definitheit).

N2) $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in V$ (Homogenität).

N3) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ für alle $v, w \in V$ (Dreiecksungleichung).

V zusammen mit $\|\cdot\|$ heißt dann normierter Vektorraum.

Beispiele für normierte Vektorräume.

- $\mathbb{R}$ mit der Betragsfunktion $|\cdot|$ ist ein normierter Vektorraum.
- Für $n \geq 1$ ist der $\mathbb{R}^n$, zusammen mit der p–Norm, $p \in \mathbb{N}$,

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p} \qquad \text{für } x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n,$$

ein normierter Vektorraum.

Spezialfall: Für $p = 2$ bekommt man die Euklidische Norm

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} \quad \text{für } x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

Weiterhin $(p = \infty)$: Die Maximumnorm

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \quad \text{für } x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

3.2. Folgen

Definition: Sei V ein normierter Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$. Eine Folge ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to V$, $n \mapsto a_n$, kurz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(a_n)_{n\geq 1}$.

Beispiele für Folgen.

- Reelle Folgen (Folgen reeller Zahlen), d.h. $V = \mathbb{R}$, z.B. ist

  $$a_n = \frac{1}{n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

  eine reelle Folge.

- Komplexe Folgen (Folgen komplexer Zahlen), d.h. $V = \mathbb{C}$, z.B. ist

  $$a_n = i^n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

  eine komplexe Folge.

Weitere Beispiele für Folgen.

- Vektorenfolgen (Folgen von Vektoren), d.h. $V = \mathbb{R}^d$ oder $V = \mathbb{C}^d$, z.B. ist
$$a_n = \left(\frac{1}{n}, n, \frac{1}{n^2}\right) \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ und } d = 3$$
eine Folge reeller Vektoren.
- Funktionenfolgen (Folgen von Funktionen), etwa $V = \mathcal{C}[a, b]$, z.B. ist für $[a, b] = [0, 1]$ die Folge
$$f_n(x) = x^n \quad \text{für } x \in [0, 1] \text{ und } n \in \mathbb{N}$$
eine Funktionenfolge.

Bemerkung: Wir bezeichnen mit $\mathcal{C}[a, b]$ die Menge der stetigen reellwertigen Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Rechenoperationen mit Folgen.

Die Menge aller Folgen in V bildet einen Vektorraum $V^{\mathbb{N}}$, für den die *Addition* und *skalare Multiplikation* wie folgt definiert sind.

$$\begin{aligned} (a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} &:= (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ \lambda(a_n)_{n\in\mathbb{N}} &:= (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

Rekursion und Iteration.

Folgen lassen sich rekursiv beschreiben durch

$$a_{n+1} := \Phi(n, a_n) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

wobei

$$\Phi : \mathbb{N} \times V \to V$$

eine bestimmte Iterationsvorschrift bezeichnet.

Das Bisektionsverfahren (Intervallhalbierung).

- **Ziel:** Bestimme eine Nullstelle einer stetigen Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
- **Voraussetzung:** $f(a) \cdot f(b) < 0$.
- **Iteration:** Definiere zwei Folgen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(v_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rekursiv mit den Startwerten $(u_0, v_0) = (a, b)$ und der Iterationsvorschrift.

$$
\begin{array}{l}
\text{FOR } n = 1, 2, \ldots \\
\quad x := (u_{n-1} + v_{n-1})/2; \\
\quad \text{IF } f(x) = 0 \text{ THEN } \text{RETURN} \\
\quad \text{IF } (f(x) \cdot f(v_{n-1}) < 0) \text{ THEN} \\
\qquad u_n := x; \quad v_n := v_{n-1}; \\
\quad \text{ELSE} \\
\qquad u_n := u_{n-1}; \quad v_n := x;
\end{array}
$$

OUTPUT: x mit $f(x) = 0$, Nullstelle von f in $[a, b]$.

Beispiel zum Bisektionsverfahren.

Betrachte die Funktion $f(x) = x^2 - 2$ auf dem Intervall $[1, 2]$.

Die gesuchte Nullstelle liegt bei $x = \sqrt{2} = 1.4142\,13562\ldots$

n	u_n	v_n
0	1.0000 00000	2.0000 00000
1	1.0000 00000	1.5000 00000
2	1.2500 00000	1.5000 00000
3	1.3750 00000	1.5000 00000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10	1.4140 62500	1.4150 39063
20	1.4142 13181	1.4142 14134
30	1.4142 13562	1.4142 13562
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Beobachtung: Das Bisektionsverfahren konvergiert relativ langsam!