Aufgabe 1:

a) Berechnen Sie die Grenzwerte der Folgen

(i) $a_n := \left(\sqrt{n^4 + 8n^2 - 1} - (n^2 + 2) \right) , \qquad n \in \mathbb{N} ,$

(ii) $b_n := \cos\left(\frac{\pi}{2n+1} \left(\frac{3n^3 + 5n}{n^2 + 2} - 5n \right) \right) , \qquad n \in \mathbb{N} .$

b) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$s := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \cdot \frac{k+2}{k+1}$$

konvergiert.

Es sei $s_n := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!} \cdot \frac{k+2}{k+1}$. Berechnen Sie ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $|s - s_n| < 10^{-2}$ gilt.

Lösung zur Aufgabe 1:

a) Unter Anwendung der 3. binomischen Formel erhält man

(i) **[2 Punkte]**

$$a_n = \left(\sqrt{n^4 + 8n^2 - 1} - (n^2 + 2) \right) = \frac{(n^4 + 8n^2 - 1) - (n^4 + 4n^2 + 4)}{\sqrt{n^4 + 8n^2 - 1} + (n^2 + 2)}$$

$$= \frac{4n^2 - 5}{\sqrt{n^4 + 8n^2 - 1} + (n^2 + 2)} = \frac{(4 - \frac{5}{n^2})}{\sqrt{1 + \frac{8}{n^2} - \frac{1}{n^4}} + 1 + \frac{2}{n^2}} .$$

Also gilt : $\qquad \lim\limits_{n \to \infty} a_n = \frac{4}{\sqrt{1} + 1} = 2.$

(ii) **[2 Punkte]**

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2n+1} \left(\frac{3n^3 + 5n}{n^2 + 2} - 5n \right) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2n+1} \left(\frac{3n^3 + 5n - 5n^3 - 10n}{n^2 + 2} \right) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2n+1} \left(\frac{-2n^3 - 5n}{n^2 + 2} \right) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2 + \frac{1}{n}} \left(\frac{-2 - \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{2}{n^2}} \right) \right) = \cos\left(\frac{\pi(-2)}{2} \right) = -1.
\end{aligned}$$

b) $s = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, \frac{1}{k!} \cdot \frac{k+2}{k+1}\,.$

Mit $a_k := \frac{1}{k!} \frac{k+2}{k+1}$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{k+2}{k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1+\frac{2}{k}}{1+\frac{1}{k}} = 0. \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Wegen $k!, k+1, k+2 > 0$, ist offensichtlich $a_k > 0$ und es ist

$$\begin{aligned} \frac{a_{k+1}}{a_k} &= \frac{(k+3)}{(k+1)!(k+2)} \cdot \frac{k!(k+1)}{k+2} = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{(k+3)(k+1)}{(k+2)^2} \\ &= \frac{k+3}{k^2+4k+4} < 1\,. \qquad \textbf{[2 Punkte]} \end{aligned}$$

Das heißt, dass die Folge der a_k streng monoton fällt.

Die Folge der a_k ist also streng monoton fallend gegen Null. Damit sind die Vorraussetzungen zur Anwendung des Leibniz Kriteriums erfüllt. Die Reihe ist konvergent. **[1 Punkt]**

Es gilt

$$|\, s - s_n \,| \le |a_{n+1}| = \frac{n+3}{(n+1)!\,(n+2)}$$

Also zum Beispiel

$$|\, s - s_4 \,| \le |a_5| = \frac{5+2}{5!\,(5+1)} = \frac{7}{6\cdot 120} = \frac{7}{720} < \frac{1}{100} \qquad \textbf{[2 Punkte]}$$

Aufgabe 2:

a) Gegeben ist die Funktion $f :]-1, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) := \dfrac{-2x}{1+x}$.

Bestimmen Sie das Taylor-Polynom $T_2(x; x_0)$ zweiten Grades von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und zeigen Sie, dass für das Restglied $R_2(x; x_0)$ folgende Abschätzung gilt

$$|R_2(x;0)| := |f(x) - T_2(x;0)| \le \frac{1}{320}, \qquad \forall\, x \in I := [-0.1,\, 0.1]\,.$$

b) Berechnen Sie folgenden Grenzwert mit Hilfe der Regel von l'Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{2 - e^{x^2} - e^{-x^2}}{x^4}.$$

Lösung 2:

a) $f(x) := \dfrac{-2x}{1+x}$,

$$f'(x) := \frac{-2(1+x) - (-2x)}{(1+x)^2} = -2(1+x)^{-2}, \ \textbf{[1 Punkt]}$$

$f''(x) = -2 \cdot (-2)(1+x)^{-3} = 4(1+x)^{-3}$, **[1 Punkt]** $\qquad f^{(3)}(x) = -12(1+x)^{-4}$

$f'(0) = -2, \qquad f''(0) = 4$ **[1 Punkt]**

also

$T_2(x;0) = f(0) - 2x + \frac{4}{2!}x^2 = -2x + 2x^2\,.$ **[1 Punkt]**

Für den Abbruchfehler rechnet man mit einem θ aus $I = [-0.1,\, 0.1]$:

$$\begin{aligned} |R_2(x;0)| &= \frac{|f'''(\theta)|}{3!} \cdot |x - x_0|^3 = \frac{|12(1+\theta)^{-4}|}{3!} \cdot |x - x_0|^3 \\ &\le 2 \cdot (0.9)^{-4} \cdot (0.1)^3 = \frac{2 \cdot 10^4}{9^4 \cdot 10^3} \\ &= \frac{20}{81 \cdot 81} < \frac{1}{4 \cdot 80} = \frac{1}{320} \qquad \textbf{[3 Punkte]} \end{aligned}$$

b) Mit der Regel von l'Hospital rechnet man:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{2 - e^{x^2} - e^{-x^2}}{x^4} &= \lim_{x\to 0} \frac{-2x\, e^{x^2} + 2x\, e^{-x^2}}{4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-e^{x^2} + e^{-x^2}}{2x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-2x\, e^{x^2} - 2x\, e^{-x^2}}{4x} = \lim_{x\to 0} \frac{-e^{x^2} - e^{-x^2}}{2} = -1 \qquad \textbf{[3 Punkte]} \end{aligned}$$