Department Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2011/12**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. H. P. Kiani

Analysis I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 6

Aufgabe 1: Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - 2x + e^{x-1} + \cos(1-x) - 2$.

a) Zeigen Sie, dass f genau zwei reelle Nullstellen hat.

b) Zeigen Sie , dass f genau ein Extremum im Intervall $]-1, 1[$ besitzt, und klassifizieren Sie dieses Extremum (Handelt es sich um ein Maximum oder ein Minimum?).

Gibt es außerhalb dieses Intervalls noch weitere Extrema? Bitte begründen Sie Ihre Antwort.

c) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades $T_2(x; 1)$ zur Funktion f mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

Zeigen Sie, dass für den Restterm R_2 folgende Abschätzung gilt:

$$|\, R_2(x; x_0)\,| \;=\; |\, f(x) - T_2(x; x_0)\,| \;\le\; 10^{-3} \qquad \forall\, x \in [0.9,\, 1.1]\,.$$

Aufgabe 2: (Klausur 03/04) Gegeben sei die Funktion $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$.

a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die k-te Ableitung von f für alle $k \in \mathbb{N}_0$ durch die Formel

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k\,(x^2 - 2kx + k(k-1))}{e^x} \qquad k \in \mathbb{N}_0$$

gegeben ist.

b) Geben Sie das Taylor-Polynom dritten Grades von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an.

c) Schätzen Sie den absoluten Fehler $|f(x) - T_3(x; 0)|$ im Intervall $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ nach oben ab.

Aufgabe 3: Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+3)}{\ln(2x^2)}$ (Klausur 07/08)

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{e^{x^2}-1}\right)$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 + x^2 - 2\cos(x)}{x^2}$ (Klausur 03/04)

d) $\lim\limits_{x \to \infty} x^4 \cdot (0.2)^x$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x^2)}{\cos(x) + 2x^2 - 1}$ (Klausur 09/10)

Aufgabe 4:

Gegeben sei die Rechenvorschrift

$$f(x) \;=\; \exp\left(\frac{2x-1}{(x-1)^2}\right) .$$

a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich D von f in $\mathbb{R}$ an.

b) Untersuchen Sie das Verhalten von f für $x \;\to\; \pm\infty$.

c) Untersuchen Sie das Verhalten von f in den Definitionslücken $x \in \mathbb{R} \setminus D$.

d) Bestimmen Sie die Nullstellen von $f : D \to \mathbb{R}$

e) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f und bestimmen Sie die Extrema von f . **Hinweis:** Die zweite Ableitung von f benötigen Sie hierfür nicht.

f) Geben Sie das Bild von D unter f an (Wertebereich).

g) Skizzieren Sie (z.B. mit Hilfe von Matlab) den Graphen von f für $x \in [-30; 30]$.

Abgabetermine: 30.1-4.2