Department Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2011/12**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. H. P. Kiani

Analysis I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 5

Aufgabe 1: Berechnen Sie für die folgenden Funktionen die ersten Ableitungen an der Stelle $x_0 = 1$.

$$
\begin{array}{ll}
f : [0.75,\ 1.25] \mapsto \mathbb{R} & f(x) = \ln\left(\cos^2(x^3 - 1)\right) e^{x^2}, \\
g : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R} & g(x) = x^x - x, \\
h : [0.8,\ 1.2] \mapsto \mathbb{R} & h(x) = \left(x(\ln(x))^2 - \dfrac{x^2}{2 + \sin(x-1)} \right)^{-1} .
\end{array}
$$

Aufgabe 2: Gegeben sei die Funktion

$$f : (-2, \infty) \mapsto \mathbb{R}, \qquad f(x) \;=\; \ln\sqrt{2+x} - \frac{1}{x+2}.$$

a) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to -2+} f(x)$.

b) Zeigen Sie, dass für alle Ableitungen der Ordnung $k \geq 1$ von f

$$f^{(k)}(x) \;=\; (-1)^{k+1} \left(\frac{(k-1)!}{2(x+2)^k} \;+\; \frac{k!}{(x+2)^{k+1}} \right) \text{ gilt.}$$

Aufgabe 3:

a) Zwei Leichtathleten starten zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ einen Hundertmeterlauf. Sie laufen auf zwei parallelen, geraden Bahnen (Näherungsweise eindimensionale stetig differenzierbare Bewegung entlang einer Geraden). Die Sportler erreichen zum exakt gleichen Zeitpunkt das Ziel. Zeigen Sie, dass es dann während des Rennens mindestens einen Zeitpunkt gegeben haben muss, zu dem die Sportler die gleiche Geschwindigkeit gehabt haben.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x) \;=\; \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ b & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

bei geeigneter Wahl von $b \in \mathbb{R}$ zwar stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist, aber für keine Wahl von b differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$ wird.

c) Gegeben sei die Funktion $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} (\omega - 1)x^2 + (2 - \omega)x & x \in [0, 1] \\ A \sin(\omega x) & x \in (1, 2] \end{cases}$$

wobei $A \in \mathbb{R}$ und $\omega \in [0, 2]$ gelte. Bestimmen Sie die Konstanten A und ω so, dass f im Intervall (0,2) differenzierbar ist.

Aufgabe 4:

a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes und des Satzes von Rolle die Anzahl der reellen Nullstellen der durch $g(x) = \cos(x) - 2x^2$ gegebenen Funktionen.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) := x^3 + 2x - xe^{x^2}$$

genau drei Nullstellen hat. Berechnen Sie Näherungen n_k für die Nullstellen x_k, $k = 1, 2, 3$ mit gesicherten absoluten Fehlern von höchstens 0.05. Können Sie auch die relativen Fehler abschätzen?

Abgabetermine: 16.1-20.1.2012