Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2011/12**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. H. P. Kiani

Analysis I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 4

Aufgabe 1: (a: 3+3, b:4 Punkte)

Gegeben seien die Reihen

$$i)\ s_n = \sum_{k=1}^{n} 3\,\frac{2^{2(k+1)}}{9^{k-1}} \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad\qquad ii)\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{(k+2)(k+4)} \qquad n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}\,.$$

a) Zeigen Sie, dass beide Reihen konvergieren und berechnen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. (Hinweis zu ii) Siehe Beispiel 3.4.12 a der Vorlesungsfolien)

b) Plotten Sie die Punkte (n, s_n) bzw. (n, S_n) mit Hilfe von Matlab für $n = 1$ bis 50.

Aufgabe 2: (14 Punkte) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3n-1}$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n-1}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4\cdot 2^n - 3}$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{k^3\sqrt{k}}$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^{10}}$ f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{2}{k}\right)^{k+1}}{k!}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n-1}-\sqrt{n}\right)^n$ h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\frac{nx}{2})}{2^n}$

Aufgabe 3: (10 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(2n+1)(n+2)}$ konvergiert.

Sei s der Grenzwert der Reihe und s_k die Partialsumme

$$s_k := \sum_{n=0}^{k} (-1)^n \frac{n}{(2n+1)(n+2)}.$$

Geben Sie (mit Begründung) eine natürliche Zahl k an, so dass der Abbruchfehler $|s_k - s|$ kleiner als 0.01 wird.

b) (Klausur 09/10) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$s := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, \frac{k+3}{2^k \, (k+1)}$$

konvergiert und geben Sie (mit Begründung) eine obere und eine untere Schranke für den Grenzwert s der Reihe an.

Aufgabe 4: (2+2+2 Punkte)

a) (klausur 2006) Prüfen Sie, ob man den Parameter a so wählen kann, dass die Funktion f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig wird.

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+1} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & : \ x > 0 \\ 1 + a(x-1) & : \ x \le 0 \end{cases}$$

b) Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \le 0, \\ A(x-3) + B & \text{für } x \in (0,3], \\ \ln(x^2 - x - 6) - \ln(x-3) & \text{für } x > 3, \end{cases}$$

$$g(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 27} & : \ x \ne 3\,, \\ C & : \ x = 3\,. \end{cases}$$

Wählen Sie die Zahlen A, B und C aus $\mathbb{R}$ so, dass die Funktionen f und g auf ganz $\mathbb{R}$ stetig werden.

Abgabetermine: 19.12-23.12.2011