Department Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2010/11**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. H. P. Kiani

Analysis I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 3

Aufgabe 1: (5+5 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Folge $a_n := \dfrac{4^{n+2} + 3^{n-1}}{4^n + 5}$, $n \in \mathbb{N}$ gegen $a = 16$ konvergiert.

b) Tina hat ihrem kleinen Bruder beim Schaukeln Anschwung gegeben. Die Schaukel (genauer die Enden der Ketten an denen die Sitzfläche hängt) hat im Ruhezustand eine Höhe von 0.5 Metern über dem Boden. Nach dem Anschwingen hat die Schaukel die schwindelerregende Höhe von zwei Metern über dem Boden erreicht. Bei jedem Hin- und Herschwingen reduziert sich, die über dem Ruhezustand gewonnene maximale Höhe der Schaukel um 5% . Geben Sie eine Folge an, deren n-tes Glied die maximale Höhe beim $n-$ ten mal Hin- und Herschwingen angibt. Wie oft schwingt die Schaukel hin und her bevor sie zum ersten Mal unterhalb einer Höhe von einem Meter über dem Boden bleibt?

Zu den Aufgaben 2 und 3a: Bitte lösen Sie die angegebenen Aufgaben, kreuzen Sie bei mehreren Auswahlmöglichkeiten die richtige(n) Zeile(n) an, und tragen Sie gegebenenfalls in den angekreuzten Zeilen Ihre Antworten in die dafür vorgegebenen Kästchen ein. Der Lösungsweg wird nicht bewertet.

Aufgabe 2: (3+2+3+2 Punkte)

a) (Klausur 09/10) Geegeben ist die Folge $a_n = \sqrt{n^2 + 4n + 1} - \sqrt{n^2 + n - 2}$, $n \in \mathbb{N}$.

- ☐ Die Folge a_n, $n \in \mathbb{N}$ divergiert ohne erkennbare Häufungspunkte.
- ☐ Die Folge a_n, $n \in \mathbb{N}$ konvergiert uneigentlich gegen ∞.
- ☐ Die Folge a_n, $n \in \mathbb{N}$ konvergiert und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ $\boxed{=\quad}$

b) Gegeben ist die Folge $b_n := \left[\dfrac{1}{n+2}\left(\dfrac{3n^3 + 4n - 1}{2n^2} - 3n\right)\right]^3$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

- ☐ die Folge b_n, $n \in \mathbb{N}$ konvergent und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ $\boxed{=\quad}$
- ☐ die Folge b_n, $n \in \mathbb{N}$ divergent.

c) Gegeben ist die Folge $c_n = \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^{4(n-2)}, \qquad n \in \mathbb{N}$.

☐ Die Folge c_n, $n \in \mathbb{N}$ konvergiert und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ $\boxed{=\qquad}$

☐ Die Folge c_n, $n \in \mathbb{N}$ ist divergent.

d) Die komplexwertige Folge $z_n = \left(\frac{4+3i}{10}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, $\qquad i^2 = -1$

☐ konvergiert gegen $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ $\boxed{=\qquad}$

☐ ist divergent.

Aufgabe 3: (3+7 Punkte)

a) Es sei $r \in \mathbb{R}$ gegeben. Die Folge $b_n := \cos(n\pi)\left[\left(\frac{r-1}{5}\right)^n - 1\right]$, $n \in \mathbb{N}$

☐ konvergiert für alle $r \in \mathbb{R}^+$.

☐ konvergiert genau dann, wenn $|r| < 1$ gilt.

☐ divergiert für alle $r \in \mathbb{R}^+$ mit $r > 6$.

☐ konvergiert genau dann, wenn $r = 6$ gilt.

☐ hat für $r \in (-4, 4)$ die Häufungspunkte $\boxed{h_1 = \qquad h_2 = \qquad}$

b) *

Bernoulli-Prozesse sind Ihnen vermutlich aus der Schule bekannt. Es handelt sich um Versuche mit zwei möglichen Ergebnissen. Hat das gewünschte Ergebnis die Wahrscheinlichkeit p, so beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass das gewünschte Ergebnis bei n Versuchen genau k mal eintritt

$$p_{k,n} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} . \qquad (1)$$

Sei nun λ eine feste reelle Zahl und $p = \frac{\lambda}{n}$. Welchen Ausdruck erhalten Sie dann für $p_{k,n}$ nach der Formel (1)? Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} p_{k,n}$. Dieser Grenzwert wird unter geeigneten Voraussetzungen als gute Näherung für die Wahrscheinlichkeit angesehen, dass ein sehr seltenes Ereignis bei einer sehr großen Zahl von Versuchen genau k-mal eintritt (Stichwort Poissonverteilung).

*) Die mit einem Stern versehenen Aufgaben sind keine Standardaufgaben. Zur Lösung dieser Aufgaben muss eventuell etwas länger nachgedacht werden.

Aufgabe 4: (1+4+5 Punkte)

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz in $\mathbb{R}$ und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzwerte.

a) $a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 10}{6}$,

b) $b_0 = 1, \qquad b_{n+1} := \dfrac{3 + 5b_n}{20}$, (Klausur SoSe 2010) ,

c)(Klausur SoSe 2004) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(t) = t^2 + t - 6.$$

i) Zeigen Sie, dass das Newton Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle der Funktion f mit dem Startwert $t_0 = 3$ die Folge

$$t_0 = 3, \quad t_{n+1} = \frac{t_n^2 + 6}{2t_n + 1}; \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

erzeugt.

ii) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $t_n \geq 2$ gilt.

iii) Zeigen Sie, dass die Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton fallend ist.

iv) Beweisen Sie die Konvergenz der Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und bestimmen Sie den Grenzwert.

Abgabetermine: 5.12-9.12.2011