Department Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2010/11**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. H. P. Kiani

Analysis I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 2

Aufgabe 1: Bitte lösen Sie die angegebenen Aufgaben, kreuzen Sie bei mehreren Auswahlmöglichkeiten die richtige(n) Zeile(n) an, und tragen Sie gegebenenfalls in den angekreuzten Zeilen Ihre Antworten in die dafür vorgegebenen Kästchen ein. Sie erhalten 1 bis 2 Punkte pro richtige Teilaufgabe und keinen Punkt, wenn Sie eine falsche oder keine Lösung dieser Teilaufgabe angegeben haben. Der Lösungsweg wird nicht bewertet.

a) Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \le n-1$ gilt

☐ $\binom{n}{k+1} \le \binom{n}{k}$.

☐ $\binom{n}{k+1} \le (n-k)\binom{n}{k}$.

b) Es sei $M := \{\, x \in \mathbb{Q} : x \ge 0,\ x^2 \le 2\}$.

☐ Dann ist $\inf M = \min M$ $\boxed{=\quad}$

☐ Dann ist $\sup M = \max M$ $\boxed{=\quad}$

☐ $\min M$ existiert nicht und es ist $\inf M$ $\boxed{=\quad}$

☐ $\max M$ existiert nicht und es ist $\sup M$ $\boxed{=\quad}$

c) Geben Sie die Polarkoordinatendarstellung der folgenden komplexen Zahlen an.

$z_1 = -4 = \boxed{\quad}$ $z_2 = (\sqrt{3}+i) = \boxed{\quad}$

d) Gegeben ist $z(t) = e^{(2+3it)}$, $i^2 = -1$. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von $z(t)$

Realteil: $\mathrm{Re}\,(z(t))$ $\boxed{=\qquad\qquad}$ Imaginärteil: $\mathrm{Im}\,(z(t))$ $\boxed{=\qquad\qquad}$

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Abbildung $f:\, D := \mathbb{N} \setminus \{\,1\,\} \to \mathbb{R}$, $f(n) = \dfrac{1}{(2n)!}\dbinom{n}{2}$.

a) Zeigen Sie, dass $\forall n \in D:\ \dfrac{f(n+1)}{f(n)} \le \dfrac{1}{2}$ gilt.

b) Geben Sie eine obere und eine untere Schranke für das Bild $W = f(D)$ von D unter f an.

c) Existieren Infimum, Supremum, Minimum, Maximum von W ?

Aufgabe 3: Gegeben sei $p(x) = x^3 + 2x^2 + 5x - 26$.

a) Bestimmen Sie alle reell- oder komplexwertigen Nullstellen von p.

b) Schreiben Sie p in Potenzen von $(x-2)$ um, d.h. in die Form $p(x) = \sum_{k=0}^{3} a_k (x-2)^k$.

Aufgabe 4:

a) Aus der Vorlesung ist die Regel von de Morgan $\neg\,(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$ bekannt.
Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion die Gültigkeit dieser Regel für $n \in \mathbb{N}$ Aussagen. Zeigen Sie also

$$\neg\,(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n) = \neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \cdots \vee \neg A_n$$

b) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

c) (etwas schwieriger) Bei der Modellierung physikalischer Prozesse tauchen oft Terme der Form $(a-b)^n$ in der speziellen Konstellation auf, dass $|b|$ im Vergleich zu $|a|$ sehr klein ist. Setzt man $x = \frac{b}{a}$, so erhält man

$$(a-b)^n = a^n(1-x)^n$$

und kann in guter Näherung

$$(1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-x)^k$$

durch die ersten Summanden der Summe ersetzen.(Warum?)

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\forall n \in \mathbb{N},\, n > 2,\, \forall x \in]0,1[$ folgende Einschließung gilt:

$$1 - nx \, < \, (1-x)^n \, < \, 1 - nx + \frac{1}{2}\, n(n-1)x^2$$

gilt. Zeigen Sie also durch einen Induktionsbeweis, dass

$$1 - nx \, < \, (1-x)^n$$

gilt, und durch einen separaten Induktionsbeweis, dass

$$(1-x)^n \, < \, 1 - nx + \frac{1}{2}\, n(n-1)x^2$$

gilt.

Welchen Fehler macht man maximal, wenn man für $x \in]0, \frac{1}{10}[$ den Term $(1-x)^4$ durch $1 - 4x + 6x^2$ ersetzt?

Abgabetermine: 21.-25.11.11