Department Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2011/12**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. H. P. Kiani

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 1

Aufgabe 1:

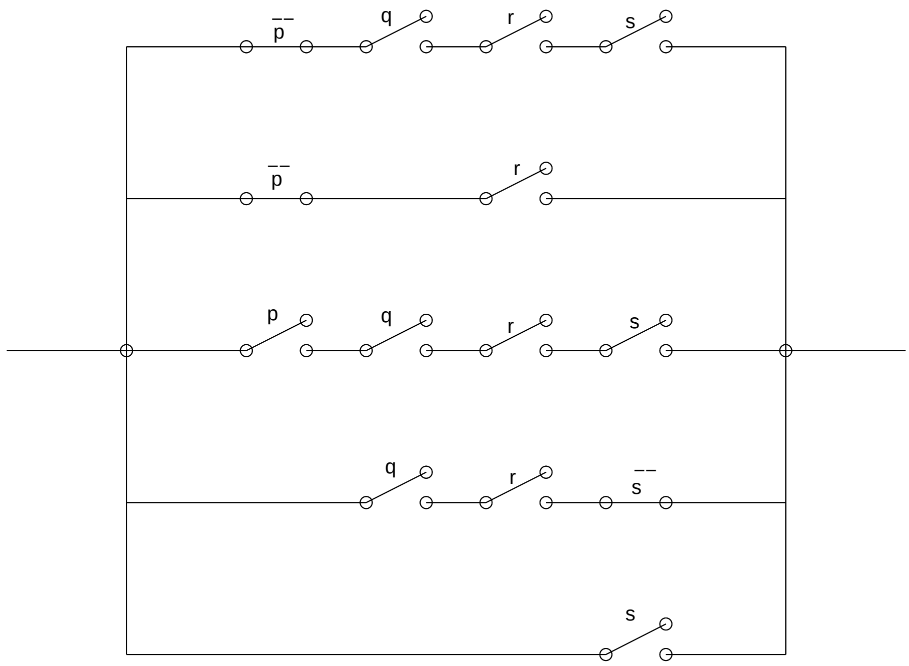
a) Zeigen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln die Gültigkeit folgender Äquivalenzen:

(i)
$$((A \vee B) \wedge \neg(B \vee C)) \Longleftrightarrow (A \wedge \neg B \wedge \neg C)$$

(ii)
$$((A \wedge (B \vee C)) \Longleftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$$

b) Das folgende Schaltbild mehrpoliger Schalter p, q, r und s kann durch die logischen Verknüpfungen

$(\bar{p} \wedge q \wedge r \wedge s) \vee (\bar{p} \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r \wedge s) \vee (q \wedge r \wedge \bar{s}) \vee s$



$\bar{s}$ = nicht s

dargestellt werden. Hierbei entspricht eine Parallelschaltung von Schaltern (z. B. von q und r) einer Oder–Verknüpfung von Aussagen (z. B. $q \vee r$). Eine Serienschaltung entspricht einer Und–Verknüpfung und $\bar{p}$ entspricht der Negation von p .

Vereinfachen Sie den oben angegebenen logischen Ausdruck und zeichnen Sie das dazugehörige einfachere Schaltbild.

Aufgabe 2:

a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $x_0 \in I$. Verneinen Sie die Aussage

$$A(x_0) :\Leftrightarrow \left(\exists \epsilon > 0 \; :]x_0 - \epsilon,\, x_0 + \epsilon[\subset I \right).$$

Für welche reellen Intervalle I gilt: $\forall x \in I : A(x)$?

b) Beweisen Sie folgende Aussagen oder widerlegen Sie die Aussagen mit Hilfe von Gegenbeispielen.

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Die Zahl $m := 3n(n^2+2)$ ist durch 9 teilbar.

(ii) Voraussetzung: Für $i = 0,\, 1,\, 2$ seien die Zahlen $a_i \in \mathbb{Z}$ ungerade. Das heißt $\exists\, k_i \in \mathbb{Z} : \; a_i = 2k_i - 1$ für $i = 0,\, 1,\, 2$.
Behauptung: Dann hat das Polynom

$$p(x) \; := \; a_2 x^2 \; + \; a_1 x \; + \; a_0$$

keine rationale Nullstelle.
Hinweis: die Summe zweier ungerader Zahlen ist eine gerade Zahl.

(iii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 \; = \; \frac{5n^2 - 7n + 4}{2}$.

Aufgabe 3:

a) Seien $f, g, h \; : \; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegebene Funktionen. Verändern folgende Umformungen die Lösungsmenge der Ungleichung $f(x) \le g(x)$? Wenn ja, wie?

$$f(x) + h(x) \le g(x) + h(x) \qquad\qquad f(x) \cdot h(x) \le g(x) \cdot h(x)$$

$$|f(x)| \le |g(x)| \qquad\qquad (f(x))^2 \le (g(x))^2$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \le 1$$

b) Eine reellwertige Funktion heißt *gerade*, wenn auf ihrem zum Ursprung symmetrischem Definitionsbereich ($[-a;a]$ bzw $(-a,a)$) $f(-x) = f(x)$ gilt. Sie heißt *ungerade*, wenn auf ihrem Definitionsbereich $f(-x) = -f(x)$ gilt.

Welche der folgenden Funktionen sind gerade und welche sind ungerade?

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad\qquad f(x) = \frac{\cos(x)}{1+x^2}$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad\qquad g(x) = x - \sin(x)$$

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad\qquad h(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4})$$

$$k : [-1;1] \to \mathbb{R} \qquad\qquad k(x) = \frac{x \cdot g(x)}{f(x)}$$

$$l : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad\qquad l(x) = g(x)\,(f(x))^3 + x^3$$

Skizzieren Sie den Graphen von g für $x \in [-\frac{\pi}{2}\,,\, \frac{\pi}{2}]$.

Aufgabe 4:

Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden reellen Ausdrücke definiert? Welche Werte nimmt y an?

$$y = \frac{1}{\sqrt{(6 + x - x^2)}} \qquad y = \frac{1}{\ln(x^3 + x^2 + x + 1)}$$

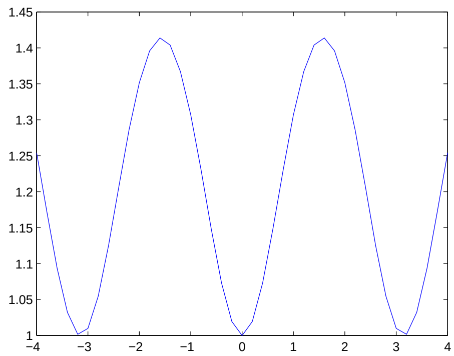
$$y = \sqrt{\cos\sqrt{x}} \qquad y = \arccos\left(\frac{\sqrt{25 - x^2}}{3}\right)$$

Zusatzaufgabe: Skizzieren Sie für die zugehörigen Funktionen $f : D \mapsto \mathbb{R},\ y = f(x)$, mit geeignetem Definitionsbereich D die Funktionsgraphen. Benutzen Sie dazu z.B. Matlab.

```
x=[-4:0.02:4]; % erzeugt x-Vektor (-4, -3.98, -3.96,..., 3.96, 3,98, 4)

y=sqrt((sin(x)).^2+1); % erzeugt zugehörigen y-Vektor. Für jeden x-Wert
                       % wird sin(x)  hoch 2 genommen (.^, s. Anleitung),
                       % ...
                       % sqrt: zweite Wurzel (square root)
plot(x,y)
```

erzeugt:



Abgabetermine: 07.11-11.11.11 (zu Beginn der jeweiligen Übung)