Department Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2009/10**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. H. P. Kiani

Analysis I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 6

Aufgabe 1:

Berechnen Sie folgende Grenzwerte

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x^2+3)}{\ln(2x^2)}$ (Klausur 07/08), **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{e^{x^2}-1} \right)$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2+x^2-2\cos(x)}{x^2}$ (Klausur 03/04) **d)** $\lim\limits_{x\to\infty} x^4 \cdot (0.2)^x$.

Aufgabe 2:

a) (Klausur 07/08)

(i) Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades T_2 zur Funktion

$$f(x) = \cos(x)\, e^x$$

mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(ii) Seien f, x_0 und T_2 wie Teil a) i) definiert. Zeigen Sie, dass dann für alle

$$x \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad |x| \leq 0.1$$

die Abschätzung

$$|\, R_2\,(x; x_0)\,| := |\, f(x) - T_2\,(x; x_0)\,| \leq 0.05$$

gilt.

b) (Klausur 03/04) In Aufgabe 3 Blatt 5 haben wir gezeigt, dass für die Ableitungen der Funktion $f(x) = \dfrac{x}{e^{2x}}$ folgende Formel gilt:

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k\, 2^{k-1}\,(2x-k)}{e^{2x}} \qquad k \in \mathbb{N}_0\,.$$

(i) Geben Sie das Taylor-Polynom dritten Grades von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an.

(ii) Schätzen Sie den absoluten Fehler $|f(x) - T_3(x;0)|$ im Intervall $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ nach oben ab.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Rechenvorschrift

$$f(x) \;=\; \exp\left(\frac{2x-1}{(x-1)^2}\right) .$$

a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich D von f in $\mathbb{R}$ an.

b) Untersuchen Sie das Verhalten von f für $x \;\to\; \pm\infty$.

c) Untersuchen Sie das Verhalten von f in den Definitionslücken $x \in \mathbb{R} \setminus D$.

d) Bestimmen Sie die Nullstellen von $f : D \to \mathbb{R}$

e) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f und bestimmen Sie die Extrema von f. **Hinweis:** Die zweite Ableitung von f benötigen Sie hierfür nicht.

f) Geben Sie das Bild von D unter f an (Wertebereich).

g) Skizzieren Sie (z.B. mit Hilfe von Matlab) den Graphen von f für $x \in [-30; 30]$.

Aufgabe 4: (Klausur 2008)

Gegeben seien die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{1}{4}(x^2 - 2)e^x$$

und das Intervall $I := [-1, 0]$.

a) Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen f', f'' von f.

b) Bestimmen Sie die Extremwerte von f' auf I.

c) Zeigen Sie, dass f das Intervall I in sich abbildet, das heißt, dass $f(I) \subset I$ gilt.

d) Zeigen Sie, dass f in I genau einen Fixpunkt x^* besitzt.

e) Führen Sie einen Schritt des Fixpunkt-Verfahrens $x_{n+1} = f(x_n)$ mit dem Startwert $x_0 = 0$ durch.

f) Geben Sie eine Iterationszahl n an, für die sicher $|x_n - x^*| \le 0.125$ gilt.

Abgabetermine: 01.02-05.02.2010 (zu Beginn der jeweiligen Übung)