Department Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2009/10**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. H. P. Kiani

Analysis I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 5

Aufgabe 1:

a) Berechnen Sie alle reellen Nullstellen von $f(x) = e^{x^2} + 3x^4 - 2$ approximativ mit einer absoluten Genauigkeit von 0.05.

Hinweis : Natürlich dürfen Sie hier einen Taschenrechner oder einen Computer benutzen. Eine numerische Berechnung oder ein Plot genügen aber nicht. Sie müssen nachweisen, dass Sie **alle** Nullstellen näherungsweise berechnet haben.

b) Die Funktion $f : [0,2] \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(r) := \lim_{n\to\infty} \frac{e^{2r} - r^n \sin\left(\frac{r\pi}{4}\right)}{1 + r^n \sin\left(\frac{r\pi}{4}\right)}$$

besitzt im Intervall $[0,2]$ keine Nullstelle, obwohl $f(0)$ positiv ist und $f(2)$ negativ ist. Wie verträgt sich das mit dem Zwischenwertsatz?

c) Zwei Leichtathleten starten zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ einen Hundertmeterlauf. Sie laufen auf zwei parallelen, geraden Bahnen (Näherungsweise eindimensionale stetig differenzierbare Bewegung entlang einer Geraden). Die Sportler erreichen zum exakt gleichen Zeitpunkt das Ziel. Zeigen Sie, dass es dann während des Rennens mindestens einen Zeitpunkt gegeben haben muss, zu dem die Sportler die gleiche Geschwindigkeit gehabt haben.

Aufgabe 2:

a) (Klausuraufgabe SoSe 06) Prüfen Sie, ob man den Parameter a so wählen kann, dass die wie folgt definierte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig wird.

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+1} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & : \ x > 0 \\ 1 + a(x-1) & : \ x \le 0 \end{cases}$$

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ a & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

für keine Wahl von $a \in \mathbb{R}$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

c) Zeigen Sie, dass die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ b & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

bei geeigneter Wahl von $b \in \mathbb{R}$ zwar stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist, aber für keine Wahl von b differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$ wird.

Aufgabe 3:

a) Berechnen Sie die ersten zwei Ableitungen der Funktion

$$g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \qquad g(x) = x^x,$$

b) Wie oft ist die Funktion

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad h(x) = |x^3|,$$

stetig differenzierbar?

c) Gegeben sei die Funktion $f(x) = \dfrac{x}{e^{2x}}$.

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die k-te Ableitung von f für alle $k \in \mathbb{N}_0$ durch

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k \, 2^{k-1} \, (2x - k)}{e^{2x}}$$

gegeben ist.

Aufgabe 4:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\cdot$ Es gilt

$(\sinh(x))' = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ und $[\cosh(x)]^2 - [\sinh(x)]^2 = 1\cdot$

a) Leiten Sie die Ableitung der Umkehrfunktion $f^{-1}(y) = \text{Arsinh}\ (y)$ von sinh mit Hilfe der Regel zur Ableitung von Umkehrfunktionen her.

b) Zeigen Sie, dass

$\sinh(x) = y \iff x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$

gilt, und leiten Sie mit Hilfe dieser Darstellung noch einmal die Ableitung von Arsinh her.

Abgabetermine: 18.01-22.01.2010 (zu Beginn der jeweiligen Übung)