Department Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2009/10**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. H. P. Kiani

Analysis I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 4

Aufgabe 1:(a: 4+4, b:2 Punkte+ 4 Zusatzpunkte für b)

Gegeben seien die Reihen

$$i)\ s_n = \sum_{k=1}^{n} 2\,\frac{3^{k+1}}{7^{k-1}} \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad\qquad ii)\ S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{3}{k^2-1} \quad n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}\,.$$

a) Zeigen Sie, dass beide Reihen konvergieren und berechnen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

b) Plotten Sie die Punkte (n, s_n) bzw. (n, S_n) mit Hilfe von Matlab für $n = 1$ bis 50.

Aufgabe 2:

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

$$\text{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n+1}{3n^2-5n} \qquad\qquad \text{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{4n^2-n+1}$$

$$\text{c)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi}{4})}{3^n} \qquad\qquad \text{d)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n^2-1}\,.$$

Plotten Sie die Partialsummen s_n, $n = 1, 2, \ldots, 100$ für die unter 1b) und unter 2b) gegebenen Reihen in einem Bild.

Aufgabe 3: Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

$$\text{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n\,(n+1)} \qquad\qquad \text{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3\cdot 5^{n-1}-4}\right)^n$$

$$\text{c)}\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{(k+1)!} \qquad\qquad \text{d)}\ \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{n^3}{16}\left(\sqrt{n^6+5}-\sqrt{n^6-3}\right)\right]^n$$

$$\text{e)}\ \sum_{n=1}^{\infty} e^n \cdot \left(1-\frac{3}{n}\right)^{\frac{n^2}{2}}\,.$$

Aufgabe 4: (5+5 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+6}{n(n+1)}$ konvergiert.

Sei s der Grenzwert der Reihe und s_k die Partialsumme

$$s_k := \sum_{n=1}^{k} (-1)^n \cdot \frac{n+6}{n(n+1)}$$

Geben Sie eine natürliche Zahl k an, so dass der Abbruchfehler $|s_k - s|$ kleiner als 0.01 wird.

b) Im Rahmen einer längeren Rechnung benötigen Sie den Wert von $\cos(0.5)$. Ihr Pech: Sie haben nur einen ganz einfachen Taschenrechner mit den Grundoperationen $+, -, \times, :$. Ihr Glück: Eine Freundin hat Mathe I schon hinter sich und verrät Ihnen folgende Gleichung:

$$\cos(0.5) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(0.5)^{2k}}{(2k)!}.$$

Begründen Sie, dass die Reihe konvergiert, und geben Sie einen Näherungswert c für $\cos(0.5)$ an, der maximal um $2.5 \cdot 10^{-5}$ vom exakten Wert $\cos(0.5)$ abweicht, d.h.:

$$|\, c - \cos(0.5)\,| < 2.5 \cdot 10^{-5}.$$

*) Zeigen Sie, dass der relative Fehler kleiner als $3 \cdot 10^{-5}$ ist. D.h.:

$$\frac{|\, c - \cos(0.5)\,|}{|\cos(0.5)|} \leq 3 \cdot 10^{-5}.$$

Abgabetermine: 04.01-08.01.2010 (zu Beginn der jeweiligen Übung)