Department Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2009**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. H. P. Kiani

Analysis I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3

Aufgabe 1:

a) Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzwerte.

$$a_n = 5\sqrt{n}\,(\sqrt{n} - \sqrt{n-2}) \qquad n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,$$

$$b_n = \left[\frac{1}{n+1}\left(\frac{2n^3+3n^2+3}{n^2} - n\right)\right]^3 \qquad n \in \mathbb{N},$$

$$c_n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{9(n-1)} \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

b) *

Bernoulli-Prozesse sind Ihnen vermutlich aus der Schule bekannt. Es handelt sich um Versuche mit zwei möglichen Ergebnissen. Hat das gewünschte Ergebnis die Wahrscheinlichkeit p, so beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass das gewünschte Ergebnis bei n Versuchen genau k mal eintritt

$$p_{k,n} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\,. \qquad (1)$$

Sei nun λ eine feste reelle Zahl und $p = \frac{\lambda}{n}$. Welchen Ausdruck erhalten Sie dann für $p_{k,n}$ nach der Formel (1)? Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} p_{k,n}$. Dieser Grenzwert wird unter geeigneten Voraussetzungen als gute Näherung für die Wahrscheinlichkeit angesehen, dass ein sehr seltenes Ereignis bei einer sehr großen Zahl von Versuchen genau k-mal eintritt (Stichwort Poissonverteilung).

*) Die mit einem Stern versehenen Aufgaben sind keine Standardaufgaben. Zur Lösung dieser Aufgaben muss eventuell etwas länger nachgedacht werden.

Aufgabe 2:

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzwerte. Alle auftretenden Folgen seien für $n \in \mathbb{N}$ definiert.

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 0, \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 10}{6}, \\
b_1 &= 1, \quad b_{n+1} = \frac{1}{3}\sqrt{6b_n - 1}, \\
c_n &= \left(\frac{4+3i}{10}\right)^n, \qquad i^2 = -1, \\
d_n &= \left(\frac{n^2-1}{4n^2+n}, \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right), n^{-\frac{1}{2}}\right), \\
f_n &= \frac{\sin\left(\frac{2n-1}{2n+1}\pi\right) + n}{n - 1 + n\cos\left(\frac{n}{2n^2+1}\pi\right)}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3:

Betrachten Sie die Folge $t_0 = 1,\ t_{n+1} = t_n - \dfrac{4t_n^2 - 1}{8t_n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$, die das Newton Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle der Funktion $f(t) := 4t^2 - 1$ mit dem Startwert $t_0 = 1$ erzeugt.

a) Zeigen Sie, dass die Folge monoton fallend und nach unten beschränkt ist.

b) Weisen Sie die quadratische Konvergenz des Verfahrens nach. Beweisen Sie also die Gültigkeit der Ungleichung

$$|t_{n+1} - t^*| \leq C|t_n - t^*|^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

wobei C eine geeignete Konstante und t^* der Grenzwert der Folge ist.

Aufgabe 4: Es sei $r \in \mathbb{R},\ r > 0$ fest vorgegeben und

$$a_n = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 2 + r^n}{2r^n + 1} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Untersuchen Sie die Folge auf Konvergenz. Geben Sie alle Häufungspunkte der Folge an.

Abgabetermine: 7.12-11.12.2009 (zu Beginn der jeweiligen Übung)