Department Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2009**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. H. P. Kiani

Analysis I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2

Aufgabe 1: Bitte bewerten Sie folgende Aussagen.Tragen Sie in die zugehörigen Kästchen die Buchstaben „w" (für wahr) oder „f" für falsch ein. Für jede richtig bewertete Aussage erhalten Sie einen Punkt. Für jede falsch bewertete Aussage wird Ihnen ein halber Punkt abgezogen. Nicht bewertete Aussagen gehen nicht in die Wertung ein.
Hinweis: Hier ist keine Kurvendiskussion mit Ableitungen erforderlich. Es genügt die Eigenschaften der Logarithmus Funktion, die in der Vorlesung angegeben worden sind, auszunutzen.

Gegeben sei $f(x) = \ln\left((x-1)^2 \right)$, wobei $\ln$ den natürlichen Logarithmus bezeichne. Es sei D der maximale Definitionsbereich von f und $W := f(D)$ das Bild von D unter f. Dann gilt

- ☐ $D = \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.
- ☐ $D = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$.
- ☐ $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$.
- ☐ $f(x) = 2\ln(x-1) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} : x > 1$.
- ☐ $f(x) = 2\ln(x-1) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} : x \neq 1$.
- ☐ $W = f(D) = \mathbb{R}$.
- ☐ $\min\,\{y \in W\} = 0$.
- ☐ W ist nach unten beschränkt.
- ☐ $f : D \to W$ ist injektiv.
- ☐ $f : D \to \mathbb{R}$ ist surjektiv.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Abbildung $f : D := \mathbb{N} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, \quad f(n) = \frac{1}{(2n)!}\binom{n}{2}$.

a) Zeigen Sie, dass $\forall n \in D : \frac{f(n+1)}{f(n)} \leq \frac{1}{2}$ gilt.

b) Geben Sie eine obere und eine untere Schranke für das Bild $W = f(D)$ von D unter f an.

c) Existieren Infimum, Supremum, Minimum, Maximum von W?

Aufgabe 3: Gegeben sei $p(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x$.

a) Bestimmen Sie die Linearfaktorzerlegung von p.

b) Schreiben Sie p in Potenzen von $(x-2)$ um, d.h. in die form $p(x) = \sum_{k=0}^{4} a_k(x-2)^k$.

Aufgabe 4:

a) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

b) Bei der Modellierung physikalischer Prozesse tauchen oft Terme der Form $(a-b)^n$ in der speziellen Konstellation auf, dass $|b|$ im Vergleich zu $|a|$ sehr klein ist. Setzt man $x = \frac{b}{a}$, so erhält man

$$(a-b)^n = a^n(1-x)^n$$

und kann in guter Näherung

$$(1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-x)^k$$

durch die ersten Summanden der Summe ersetzen.(Warum?)

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\forall n \in \mathbb{N}, n > 2, \forall x \in]0,1[$ folgende Einschließung gilt:

$$1 - nx < (1-x)^n < 1 - nx + \frac{1}{2}n(n-1)x^2$$

gilt.

Welchen Fehler macht man maximal, wenn man für $x \in]0, \frac{1}{10}[$ den Term $(1-x)^4$ durch $1 - 4x + 3x^2$ ersetzt?

Abgabetermine: 23.-27.11.09