Department Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2009/10**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. H. P. Kiani

Analysis I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 1

Aufgabe 1:

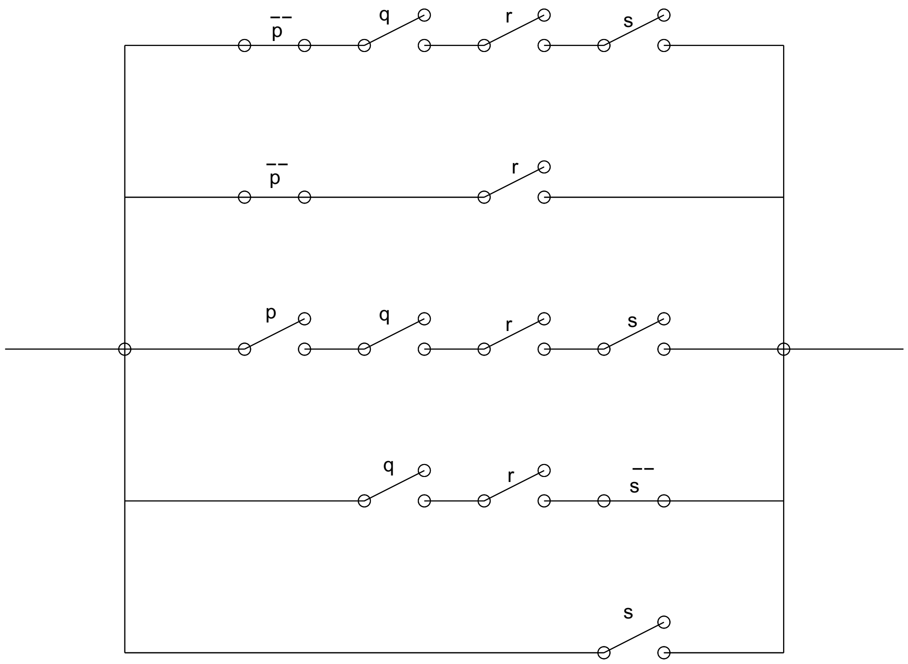
a) Zeigen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln die Gültigkeit folgender Äquivalenzen:

(i)
$$((A \vee B) \wedge \neg(B \vee C)) \Longleftrightarrow (A \wedge \neg B \wedge \neg C)$$

(ii)
$$((A \wedge (B \vee C)) \Longleftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$$

b) Das folgende Schaltbild mehrpoliger Schalter p, q, r und s kann durch die logischen Verknüpfungen

$(\bar{p} \wedge q \wedge r \wedge s) \vee (\bar{p} \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r \wedge s) \vee (q \wedge r \wedge \bar{s}) \vee s$



s = nicht s

dargestellt werden. Hierbei entspricht eine Parallelschaltung von Schaltern (z. B. von q und r) einer Oder–Verknüpfung von Aussagen (z. B. $q \vee r$). Eine Serienschaltung entspricht einer Und–Verknüpfung und $\bar{p}$ entspricht der Negation von p .

Vereinfachen Sie den oben angegebenen logischen Ausdruck und zeichnen Sie das dazugehörige einfachere Schaltbild.

Aufgabe 2:

Seien $x_0 \in \mathbb{R}$ und die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Verneinen Sie die Aussage

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0, \text{ so dass für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x - x_0| < \delta \text{ stets}$$
$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \text{ gilt} .$$

Aufgabe 3:

Beweisen Sie folgende Aussagen indirekt oder widerlegen Sie die Aussagen mit Hilfe von Gegenbeispielen.

a)
$$|\,2ab\,| \;\leq\; a^2 + b^2 \qquad \forall\, a,\, b \,\in\, \mathbb{R}\,.$$

b) Voraussetzung: Für $i = 0,\, 1,\, 2$ seien die Zahlen $a_i \in \mathbb{Z}$ ungerade. Das heißt $\exists\, k_i \in \mathbb{Z} :\; a_i \,=\, 2k_i - 1$ für $i = 0,\, 1,\, 2\,.$
Behauptung: Dann hat das Polynom

$$p(x) \;:=\; a_2 x^2 \;+\; a_1 x \;+\; a_0$$

keine rationale Nullstelle.

Hinweis: die Summe zweier ungerader Zahlen ist eine gerade Zahl.

c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \;=\; n^2 - n + 1\,.$

Aufgabe 4:

Skizzieren Sie die folgenden Mengen.

$$\begin{aligned}
M_1 \;&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x-1)^2 + (y+1)^2 < 4\},\\
M_2 \;&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (|x| + |y| < 2) \wedge (y > -1)\},\\
M_3 \;&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \max\{|x|, |y|\} < 2\},\\
M_4 \;&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \big(x^2 + (y-1)^2 < 9\big) \wedge (y > |x|)\},\\
M_5 \;&= [0,1] \times [0,2] \times [-1,0] \subset \mathbb{R}^3.
\end{aligned}$$

Abgabetermine: 09.11-13.11.2009 (zu Beginn der jeweiligen Übung)