Department Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2009/10**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. H. P. Kiani

Analysis I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

a) Schreiben Sie die links stehenden Ausdrücke als Summe bzw. Produkt.

(i)

$$9 + 11 + 13 + 15 + 17 + \cdots = \sum_{k=4}^{?} \qquad\qquad = \sum_{k=1}^{?}$$

(ii)

$$1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 = \sum_{k=0}^{?} \qquad\qquad = \sum_{k=1}^{?}$$

(iii)

$$\frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{5}{7} \cdots \frac{21}{23} = \prod_{k=?}^{?}$$

b) Schreiben Sie die nachstehenden Summen in der vorgegebenen Form um.

(i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2) = \sum_{k=1}^{?}$ (ii) $\displaystyle\sum_{k=3}^{52}(2k-5) = \sum_{k=1}^{?}$

(iii) $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{-1} (-2)^{(-k-1)} z^k = \sum_{k=?}^{?} \frac{?}{z^k}$

Aufgabe 2:

Fassen Sie jeweils zu einer Summe zusammen:

a)

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_j x^{j-1} + \sum_{k=0}^{n} b_j x^j = \sum_{l=0}^{n} ?$$

b)

$$\sum_{k=1}^{10} \cos^2\left(\frac{\pi}{k}\right) + \sum_{j=2}^{11} \sin^2\left(\frac{\pi}{j-1}\right) = ?$$

Aufgabe 3:

a) Für alle reellen Zahlen x, y und z gilt bekanntlich

$(x < y) \Longleftrightarrow x + z < y + z$ und $|x| + |y| \geq |x + y|$.

Seien nun a, b, c, d beliebige Zahlen aus $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Prüfen Sie die folgenden Aussagen auf ihre Richtigkeit.

(i) $a > b,\ c > d \quad \Longleftrightarrow \quad a\,c > b\,d$,

(ii) $a > b,\ c > d \quad \Longrightarrow \quad a - d > b - c$,

(iii) $a < b \quad \Longleftrightarrow \quad \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$

(iv) $|a| - |b| \leq |a - b| \cdot$

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung.

$$8x^3 - 2x^2 \leq 3x, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Aufgabe 4:

a) Zu berechnen sei $\sin(0.2)$. Leider sind sämtliche elektronischen Geräte, die Ihnen bei der Berechnung behilflich sein könnten, ausgefallen. Sie erinnern sich aber, dass nahe Null

$$\sin(x) \approx x\,, \qquad \cos(x) \approx 1$$

gilt. Genauer gilt

$$|x - \sin(x)| \leq \left|\frac{x^3}{6}\right| , \qquad |1 - \cos(x)| \leq \left|\frac{x^2}{2}\right| .$$

Außerdem kennen Sie das Additionstheorem

$$\sin(2x) = 2\,\sin(x) \cdot \cos(x)$$

Zeigen Sie mit Hilfe dieser Informationen, dass die folgenden Schranken für $\sin(0.2)$ gelten

$$0.1985 < \sin(0.2) < 0.2005$$

b) Sie modellieren eine physikalische Größe $f(x)$ für $x \in [0.2, 0.5]$ durch $p(x)$. Als Modellierer garantieren Sie Ihrem Auftraggeber, dass für den maximalen absoluten Modellierungsfehler folgende Abschätzung gilt.

$$|A(x)| := |f(x) - p(x)| \leq \left| \frac{x^3 + \frac{1}{2}\,x + \sin(x^2)}{1000\left(x - \frac{1}{10}\right)^2} \right|$$

Der Auftraggeber behauptet, dass ihm das nicht gut genug sei, er könne nur einen maximalen Fehler von 0.15 tolerieren. Was halten Sie von dieser Aussage??

Bearbeitung: während der Übungen vom 26.10 bis 30.10