

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6

Aufgabe 21:

a) Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \frac{2x^2}{3} - 3 - \sin x .$$

Man zeige

- (i) mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass die Funktion mindestens zwei Nullstellen besitzt und
- (ii) mit Hilfe des Satzes von Rolle, dass sie höchstens zwei und damit dann genau zwei Nullstellen besitzt.

b) Man berechne die folgenden Grenzwerte

$$(i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1 - \ln(x)}{x^2 - 2x + 1}, \quad (ii) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right) .$$

Aufgabe 22: (aus dem Vordiplom Analysis I, SS03)

Gegeben sei die durch

$$f(x) = \ln(\sqrt{2+x}) - \frac{1}{x+2}$$

definierte reellwertige Funktion.

- a) Man bestimme $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$.
- b) Für f berechne man zum Entwicklungspunkt $x_0 = -1$ das Taylorpolynom $T_3(x; x_0)$.
- c) Als Näherungswert für $f(-\frac{1}{2})$ bestimme man den Wert des Taylorpolynoms $T_3(-\frac{1}{2}; -1)$ und schätze den Fehler nach oben ab.
- d) Wie lautet die Tangentengleichung für f im Punkt $x_0 = -1$?
- e) Warum kann die Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = -1$ im Punkt $x = -2$ nicht gegen f konvergieren?

Aufgabe 23: (aus dem Vordiplom Analysis I, WS04/05)

Gegeben sei die durch

$$f(x) = \exp\left(x + \frac{9}{x-4}\right)$$

definierte reellwertige Funktion. Dabei bezeichnet \exp die e -Funktion, d.h. $\exp(x) = e^x$.

- a) Man gebe den maximalen Definitionsbereich D von f an.
- b) Wie viele Nullstellen besitzt f .
- c) Man berechne $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$.
- d) Man untersuche das Verhalten von f im Unendlichen.
- e) Man untersuche das Monotonieverhalten von f im Definitionsbereich D .
- f) Man bestimme alle lokalen Extrema von f .
- g) Wie lautet das Taylor-Polynom $T_1(x; x_0)$ von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = 13$.

Aufgabe 24: (aus dem Vordiplom Analysis I, WS06/07)

Man diskutiere die reellwertige Funktion

$$f(x) = \frac{11x - x^3}{x^2 - 9}.$$

Dazu untersuche man im Einzelnen:

- a) Definitionsbereich,
- b) Symmetrien,
- c) Pole,
- d) Verhalten im Unendlichen und Asymptoten,
- e) Nullstellen,
- f) lokale Extrema und Monotonie,
- g) Wendepunkte und Konvexität.
- h) Abschließend skizziere man den Graphen von $f(x)$.

Abgabetermin: 2.2. - 6.2.09 (zu Beginn der Übung)