Analysis I

Michael Hinze
(zusammen mit Frau Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg

8. Januar 2008

Beachtenswertes

- **Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.**
- **Übungsaufgaben $\longrightarrow$ http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a1/0708/index.html**
- **Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!**
- **Übungshefte: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, H. Wenzel / G. Heinrich, ab 4ter Auflage, gibt es bei Teubner Stuttgart/Leipzig.**
- **Als Formelsammlung empfehlen wir: Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klaus Vetters, 3. Auflage, Teubner 2001.**

Übungsaufgaben für die kommenden beiden Wochen

Siehe WWW Seiten der Veranstaltung:
http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a1/0708/index.html

Buch Kap. 2.8 – Eigenschaften diffbarer Funktionen

Im Folgenden seien $f, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar.

Satz 2.15: (Satz von Rolle)
Gilt $f(a) = f(b)$, so gibt es mindestens ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$f'(x_0) = 0.$$

Satz 2.16: (Mittelwertsatz)
Es gibt mindestens ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Satz 2.17: (verallgemeinerter Mittelwertsatz)
Es gelte auf (a, b) überall $h'(x) \neq 0$. Dann existiert ein Punkt $x_0 \in]a, b[$ mit

$$\frac{f'(x_0)}{h'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{h(b) - h(a)}$$

Buch Kap. 2.7 – Eigenschaften diffbarer Funktionen

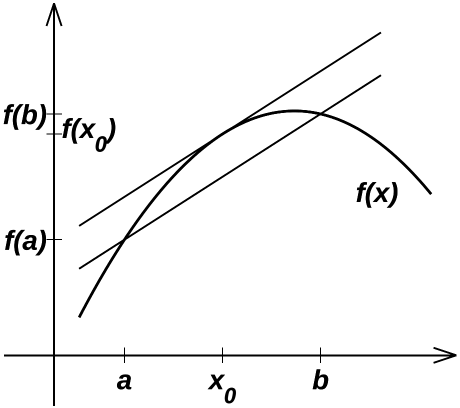

Abbildung 2.34: Sekante und parallele Tangente (Mittelwertsatz)

Buch Kap. 2.8 – Regeln von Bernoulli-l'Hospital

Satz 2.18: Seien $I = (a, b)$, $x_0 \in [a, b]$, $U(x_0)$ eine Umgebung von x_0. $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ seien zwei für alle $x \in U(x_0) \cap I$, möglicherweise mit Ausnahme von x_0, differenzierbare Funktionen. Weiter sei

$$\lim_{x \to x_0, x \in I} f(x) = \lim_{x \to x_0, x \in I} g(x) = 0, \ \infty \text{ oder } -\infty \ .$$

Es gelte $g'(x) \neq 0$ für $x \in U(x_0) \cap I$, $x \neq x_0$. Gilt dann

$$\lim_{x \to x_0, x \in I} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

(d.h. der Grenzwert im eigentlichen oder uneigentlichen Sinn existiert), so ist

$$\lim_{x \to x_0, x \in I} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0, x \in I} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ .$$

Einseitige Grenzwerte für $x \to \infty$ oder $x \to -\infty$ sind eingeschlossen.

Buch Kap. 2.8 – Regeln von Bernoulli-l'Hospital

Fortsetzung Satz 2.18: Sind f, g zwei für $x \in [A, \infty)$ bzw. $(-\infty, B]$ definierte, differenzierbare Funktionen, ist $g'(x) \neq 0$ für diese x und ist

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ bzw.\ x\to-\infty}} f(x) = \lim_{\substack{x\to\infty \\ bzw.\ x\to-\infty}} g(x) = 0,\ \infty \text{ oder } -\infty\ .$$

so gilt

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ bzw.\ x\to-\infty}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x\to\infty \\ bzw.\ x\to-\infty}} \frac{f'(x)}{g'(x)}\ ,$$

falls der zuletzt hingeschriebene Grenzwert existiert oder gleich ∞ oder $-\infty$ ist.

Buch Kap. 2.9 – Taylor Polynom

Definition 2.27: (Taylor-Polynom)

Das Polynom

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

heißt Taylor-Polynom $n-$ten Grades für die Funktion f bei der Entwicklungsstelle x_0.

Die Kurven von $y = T_n(x)$ heißen Schmiegeparabeln an die Kurve $y = f(x)$ in der Umgebung von $x = x_0$.

Buch Kap. 2.9 – Schmiegeparabeln

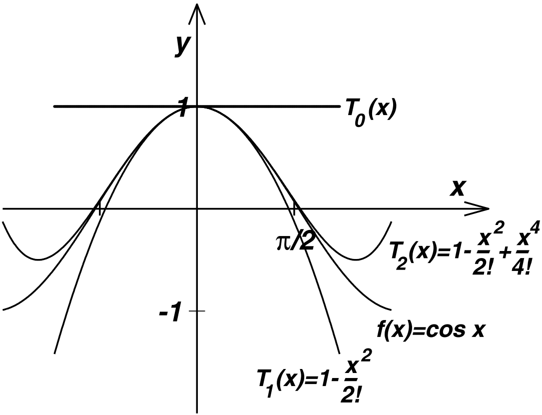

Abbildung 2.36: Taylor-Polynome (Schmiegparabeln) $T_0(x)$, $T_1(x)$, $T_2(x)$ für die Funktion $\cos x$ bei $x_0 = 0$

Buch Kap. 2.9 – Satz von Taylor

Satz 2.21: (Satz von Taylor)

Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sei auf einer Umgebung $U_\delta(x_0)$ der Entwicklungsstelle x_0 $(n+1)-$mal stetig differenzierbar und es gelte $p \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$. Dann gibt es zu jedem $x \in U_\delta(x_0)$ eine Zahl ξ zwischen x und x_0 derart, dass mit

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!\, p}(x - x_0)^p (x - \xi)^{n+1-p}$$

für die Funktion f die Darstellung

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x)$$

gilt. Die Funktion $R_n(x)$ heißt Restglied in der <u>Schlömilch-Form</u>.