Aufgabe 1)

a) (i) Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades T_2 zur Funktion

$$f(x) = \cos(x)\, e^x$$

mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(ii) Seien f, x_0 und T_2 wie Teil a) i) definiert. Zeigen Sie, dass dann für alle

$$x \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad |x| \leq 0.1$$

die Abschätzung

$$|\, R_2\,(x;x_0)\,| := |\, f(x) - T_2\,(x;x_0)\,| \leq 0.05$$

gilt.

b) Berechnen Sie $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+3)}{\ln(2x^2)}$.

Lösung 1)

a) (i)

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(x)\, e^x & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= -\sin(x)e^x + \cos(x)e^x & f'(0) &= 1 \qquad \textbf{[2 Punkte]} \\ f''(x) &= -2\sin(x)e^x & f''(0) &= 0 \end{aligned}$$

$$T_2(x,y) = 1 + x \qquad \textbf{[1 Punkt]}.$$

Dieses Ergebnis kann auch durch Einsetzen der Cosinus bzw. Exponentialreihe hergeleitet werden.

(ii) Es gilt

$$f'''(x) = -2(\sin(x) + \cos(x))e^x \qquad \textbf{[1 Punkt]}.$$

Für die Fehlerabschätzung benötigen wir eine Schranke für den Betrag der dritten Ableitung von f Für $|\theta| \leq 0.1$.

$$\left|-2(\sin(\theta)+\cos(\theta))e^\theta\right| < 4\cdot e^{0,1} < 4\sqrt{e} < 4\sqrt{4} = 8 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, |\theta| < 0.1. \;\textbf{[2 Punkte]}$$

und

$$|\, R_2\,(x;x_0)\,| \leq \frac{|f'''(\theta)|}{3!}\,|(x-0)^3| \leq \frac{8}{6}\cdot 10^{-3} < 2\cdot 10^{-3} < 0.05\,.\textbf{[1 Punkt]}$$

b) Nach den Regeln von Bernoulli/de l'Hospital rechnet man **[3 Punkte]**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+3)}{\ln(2x^2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x^2+3}}{\frac{4x}{2x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2x} = 1\,.$$

Aufgabe 2)

a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) \;=\; 2x^3 \;-\; 8x \;+\; \sin(2x)\,.$$

Zeigen Sie, dass f genau drei reelle Nullstellen hat und geben Sie Näherungen $\tilde{x}_k,\ k = 1, 2, 3$ für die Nullstellen $x_k,\ k = 1, 2, 3$ an, für die $|x_k - \tilde{x}_k| \leq 1$ gilt.

b) Beweisen Sie die Konvergenz der Reihe b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n\,(n+1)}$

Lösung 2)

a)

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2x^3 - 8x + \sin(2x) \\
f'(x) &= 6x^2 - 8 + 2\cos(2x) \\
f''(x) &= 12x - 4\sin(2x) \qquad \textbf{[2 Punkte]} \\
f'''(x) &= 12 - 8\cos(2x) \;\geq\; 4\,.
\end{aligned}$$

Die dritte Ableitung hat keine reellen Nullstellen. Nach dem Satz von Rolle hat f höchstens drei reelle Nullstellen. [**1 Punkt**]

Die Funktion ist ungerade. Es gilt $f(0) = 0$. [**1 Punkt**]

Weiterhin rechnet man zum Beispiel nach:

$$f(1) = -6 + \sin(2) < 0\,, \qquad f(2) = \sin(4)\,, \qquad f(3) = 54 - 24 + \sin(6) > 0\,.$$

[**1 Punkt**]

Wegen der Symmetrie folgt $x_1 \in [-3, -1]$, $x_2 = 0$, $x_3 \in [1, 3]$.
[**1 Punkt**]

Mit den Näherungen $\tilde{x}_1 := -2$, $\tilde{x}_2 := 0$, $\tilde{x}_3 := 2$ ist die geforderte Genauigkeit erreicht. [**1 Punkt**]

b) **[3 Punkte]**

$$s := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n\,(n+1)}\,.$$

1. Möglichkeit: Majorantenkriterium

$|a_n| \;<\; \dfrac{2}{3^n}$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ ist konvergent (geometr. Reihe).

$\displaystyle\Longrightarrow 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ ist konvergent.

$\displaystyle\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n\,(n+1)}$ ist konvergent.

2. Möglichkeit: Quotientenkriterium

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \;=\; \frac{a_{n+1}}{a_n} \;=\; \frac{2(n+1)3^n\,(n+1)}{2n\cdot 3^{n+1}\,(n+2)} \;=\; \frac{(n^2+2n+1)}{3\,(n^2+2n)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \;=\; \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{3\,(1+\frac{2}{n})} = \frac{1}{3} \;<\; 1.$$