Aufgabe 1)

a) (i) Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades T_2 zur Funktion

$$f(x) = \cos(x)\, e^x$$

mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(ii) Seien f, x_0 und T_2 wie in Teil i) definiert. Zeigen Sie, dass dann für alle

$$x \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad |x| \leq 0.1$$

die Abschätzung

$$|\, R_2\,(x; x_0)\,| \;:=\; |\, f(x) \;-\; T_2\,(x; x_0)\,| \;\leq 0.05$$

gilt.

b) Berechnen Sie $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+3)}{\ln(2x^2)}$.

Aufgabe 2)

a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = 2x^3 - 8x + \sin(2x)\,.$$

Zeigen Sie, dass f genau drei reelle Nullstellen hat und geben Sie Näherungen $\tilde{x}_k$, $k = 1, 2, 3$ für die Nullstellen x_k, $k = 1, 2, 3$ an, für die $|x_k - \tilde{x}_k| \leq 1$ gilt.

b) Beweisen Sie die Konvergenz der Reihe $\displaystyle s := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n\,(n+1)}$.