Aufgabe 1)

a) Gegeben sei $f(x) := \ln((x-1)^2)$.

(i) Bestimmen Sie die Menge $D \subset \mathbb{R}$ derjenigen reellen Zahlen x, für die $f(x) \in \mathbb{R}$ definiert ist.

(ii) Bestimmen Sie den Wertebereich $W := f(D)$ der Funktion
$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \ln((x-1)^2).$$

(iii) Wird D durch f injektiv auf W abgebildet?

(iv) Bestimmen Sie alle Nullstellen und Extremwerte von f in D.

b) Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls die Grenzwerte.

$$a_n := 5\sqrt{n}\,(\sqrt{n} - \sqrt{n-2}), \qquad S_n := \sum_{k=0}^{n} 2\,\frac{3^k}{5^k} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Lösung zu Aufgabe 1)

a) (i) Das Argument des Logarithmus muss positiv sein, d.h.

$$(x-1)^2 > 0 \iff x \neq 1 \iff x \in D := \mathbb{R} \setminus \{1\}\ [1 Punkt]$$

(ii) D wird zunächst durch $g(x) := (x-1)^2$ auf $(0, \infty)$ abgebildet und $(0, \infty)$ durch $\ln$ auf $\mathbb{R} = W$. [1 Punkt]

(iii) f ist nicht injektiv. Es gilt z.B. $f(0) = f(2) = 0$.[1 Punkt]

(iv) Nullstellen : [1 Punkt]

$f(x) = 0 \implies (x-1)^2 = 1 \longrightarrow x = 0 \vee x = 2$

Extrema: [2 Punkte]

$\ln$ ist monoton steigend. Extrema von f müßten auch Extrema von $g(x) := (x-1)^2$ sein. g nimmt auf D alle Werte aus $(0, \infty)$ an. Es gibt keine Extrema

Alternativ: $f'(x) = \dfrac{2(x-1)}{(x-1)^2} = \dfrac{2}{x-1} \neq 0 \qquad \forall x \in D$ und D offen.

b) (i) [2 Punkte]

$$a_n := 5\sqrt{n}\,(\sqrt{n} - \sqrt{n-2}) = \frac{5\sqrt{n}\,(n-(n-2))}{\sqrt{n} + \sqrt{n-2}} = \frac{10\sqrt{1}}{\sqrt{1} + \sqrt{1 - \frac{2}{n}}},$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \frac{10}{1 + \sqrt{1 - \frac{2}{n}}} = \frac{10}{2} = 5.$$

(ii) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} S_n := 2 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{5^k} = \frac{2}{1 - \frac{3}{5}} = 5$. [2 Punkte]

Aufgabe 2)

Gegeben seien die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{1}{4}(x^2 - 2)e^x$$

und das Intervall $I := [-1, 0]$.

a) Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen f', f'' von f.

b) Bestimmen Sie die Extremwerte von f' auf I.

c) Zeigen Sie, dass f das Intervall I in sich abbildet, das heißt, dass $f(I) \subset I$ gilt.

d) Zeigen Sie, dass f in I genau einen Fixpunkt x^* besitzt.

e) Führen Sie einen Schritt des Fixpunkt-Verfahrens $x_{n+1} = f(x_n)$ mit dem Startwert $x_0 = 0$ durch.

f) Geben Sie eine Iterationszahl n an, für die sicher

$$|x_n - x^*| \leq 0.125$$

gilt.

Lösung zu Aufgabe 2)

a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{4}(x^2 - 2 + 2x)e^x, \\ f''(x) &= \frac{1}{4}(x^2 - 2 + 2x + 2x + 2)e^x = \frac{1}{4}x(x+4)e^x. \qquad [2Punkte] \end{aligned}$$

b) f'' hat Nullstellen in $0 \in I$ und $-4 \notin I$. Damit hat f' Extrema in 0 und an den Rändern von I:

$$f'(0) = -\frac{1}{2} \qquad f'(-1) = \frac{-3}{4e} \qquad [1Punkt]$$

c) Die Extrema von f' sind negativ. D.h. f' ist auf I negativ und damit ist f auf I monoton. I wird abgebildet auf

$$[f(0), f(-1)] = [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4e}] \subset I. \qquad [2Punkte]$$

d) I ist abgeschlossen und f ist selbstabbildend auf I. Es ist noch zu zeigen, dass f kontrahierend ist. Nach Teil b) rechnet man für die Lipschitz-Konstante

$$L = \max_{x\in[-1,0]} |f'(x)| = \max\{|f'(-1)|, |f'(0)|\} = \max\{\frac{3}{4}e^{-1}, \frac{1}{2}\} = \frac{1}{2} < 1. \qquad [2Punkte]$$

e)

$$x_1 = f(x_0) = f(0) = -\frac{1}{2}. \qquad [1Punkt]$$

f) Es gilt:

$$|x_k - x^*| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0| = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{\frac{1}{2}}\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Ab Iteration 3 gilt sicher $|x^k - x^*| \le 0.125$. $\quad [2Punkte]$