Aufgabe 1)

a) Gegeben sei $f(x) := \ln((x-1)^2)$.

(i) Bestimmen Sie die Menge $D \subset \mathbb{R}$ derjenigen reellen Zahlen x, für die $f(x) \in \mathbb{R}$ definiert ist.

(ii) Bestimmen Sie den Wertebereich $W := f(D)$ der Funktion
$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \ln((x-1)^2)$.

(iii) Wird D durch f injektiv auf W abgebildet?

(iv) Bestimmen Sie alle Nullstellen und Extremwerte von f in D.

b) Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls die Grenzwerte.

(i) $a_n := 5\sqrt{n}\,(\sqrt{n} - \sqrt{n-2}) \qquad n \in \mathbb{N},\, n \geq 2,$

(ii) $S_n := \sum_{k=0}^{n} 2\,\frac{3^k}{5^k} \qquad n \in \mathbb{N}.$

Aufgabe 2)

Gegeben seien die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{1}{4}(x^2 - 2)e^x$$

und das Intervall $I := [-1, 0]$.

a) Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen f', f'' von f.

b) Bestimmen Sie die Extremwerte von f' auf I.

c) Zeigen Sie, dass f das Intervall I in sich abbildet, das heißt, dass $f(I) \subset I$ gilt.

d) Zeigen Sie, dass f in I genau einen Fixpunkt x^* besitzt.

e) Führen Sie einen Schritt des Fixpunkt-Verfahrens $x_{n+1} = f(x_n)$ mit dem Startwert $x_0 = 0$ durch.

f) Geben Sie eine Iterationszahl n an, für die sicher

$$|x_n - x^*| \leq 0.125$$

gilt.