Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2007/08**
Prof. Dr. Michael Hinze
Dr. Hanna Peywand Kiani

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6

Aufgabe 1: Gegeben sei die Rechenvorschrift

$$f(x) \,=\, x - 1 + \frac{1}{(x+3)^2}.$$

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D von f in $\mathbb{R}$.

b) Untersuchen Sie die Funktion

$$f : D \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x - 1 + \frac{1}{(x+3)^2}$$

auf folgende Punkte:

Verhalten in Definitionslücken, Verhalten im Unendlichen, Monotonie und Extremalstellen, Wendepunkte und Krümmungsverhalten.

Aufgabe 2: Gegeben sei die Funktion f aus Aufgabe 1.

a) Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen von f.

b) Geben Sie eine geeignete Fixpunktiteration und ein geeignetes Startintervall zur Bestimmung einer positiven Nullstelle von f an. Überprüfen Sie die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes.

c) Wieviele Iterationen genügen, um ausgehend von $x_0 = \frac{1}{2}$ die gesuchte Nullstelle von f mit einem absoluten Fehler von maximal 10^{-3} zu berechnen (a–priori–Abschätzung).

d) Führen Sie die Iterationen numerisch durch und machen Sie eine a–posteriori–Abschätzung.

Aufgabe 3: Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \frac{2}{3}x^3 - \frac{3\pi}{2}x^2 + \pi^2 x + \cos^2(x)$$

Zeigen Sie, dass die Funktion f mindestens eine reelle Nullstellen hat.

Was halten Sie davon Nullstellen von f mit Hilfe des Newton Verfahrens unter Verwendung der Startwerte $x_k = \frac{k\pi}{2}, \qquad k = 0, 1, 2$ zu suchen?

Bestimmen Sie mit Hilfe des Newton Verfahrens eine Näherung $\bar{x}$ für eine Nullstelle $\hat{x}$ von f. Brechen Sie das Verfahren ab, wenn sich zwei aufeinanderfolgende Näherungen um weniger als 10^{-5} unterscheiden. Geben Sie $f(\bar{x})$ an.

Aufgabe 4: Ein Hausbesitzer läßt sich im Keller drei baugleiche liegende zylindrische Öltanks mit dem Fassungsvermögen von je 1500 Litern einbauen. Die Konstruktion sei so, dass das Öl immer in allen Tanks gleich hoch steht. Nach der Erstlieferung von angeblich 3000 l möchte der vorsichtige Hausbesitzer nachprüfen, ob tatsächlich 3000 l geliefert wurden. Er kann die Füllhöhe in den Tanks messen. Wie hoch müßte das Öl stehen, wenn die Tanks jeweils einen Radius von 0.75 m haben?

Hinweise: Leiten Sie eine vom Radius, von der Länge L der Tanks sowie vom Winkel α (siehe Skizze) abhängige Formel für das Volumen des mit Luft gefüllten Teils eines Tanks her. Der Quotient von V_{Luft} und V_{Tank} liefert eine nichtlineare Gleichung für den Winkel α. Bestimmen Sie mit Hilfe des Newtonverfahrens eine Näherung für α und daraus eine Näherung für die Füllhöhe h.