Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2007/08**
Prof. Dr. Michael Hinze
Dr. Hanna Peywand Kiani

Analysis I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

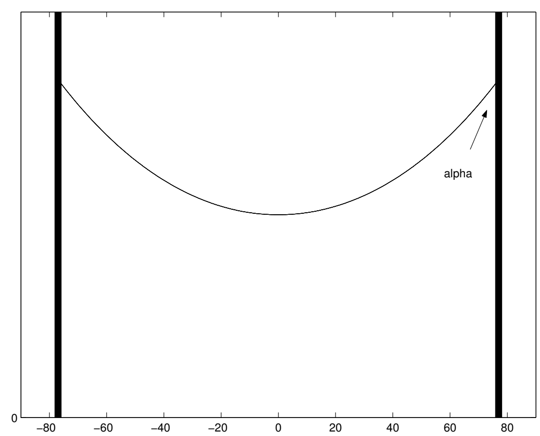
Blatt 5

Aufgabe 1:

a)

Zwischen zwei Hochhäusern sei ein Drahtseil gespannt. Wir betrachten das Seil als Graph einer Funktion. Die Ebene, in der der Graph der Funktion verläuft, sei senkrecht auf die Häuserfronten. Für die Funktion gilt bei entsprechender Konstellation
$f : [-a, a] \to \mathbb{R}$

$$f(x) := h_{\min} + k\left(\cosh\left(\frac{x}{k}\right) - 1\right).$$



Berechnen Sie die Linearisierung von f in den Punkten $\pm a$.

Sei $a = 77$, $h_{\min} = 60$, $k = 80$. Wie hoch hängt das Seil direkt an den Häuserfronten ($x = \pm a$)? Welche Winkel bildet das Seil mit den Hochhausfronten?

b) Von einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ sei bekannt, dass $|f''| \leq 1 \quad \forall x \in (-1, 1)$ gilt.

Ludger Luschig will in einem Versuch die folgenden Werte gemessen haben:

$$f(-1) = 1, \qquad f(0) = 0, \qquad f(1) = 1.$$

Weisen Sie ihm nach, dass er geschlampt hat.

Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte mit den Regeln von Bernoulli, l'Hospital

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sinh x}{x^3}$ **ii)** $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + 5x + 2}{8x^2 + 8x + 2}$

iii) $\displaystyle\lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{2x^2 + 5x + 2}{6x^2 + 5x + 1}$ **iv)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \ln(1 + x^2)$

b) Ein Körper der Masse m befinde sich im freien Fall. Der Reibungswiderstand R sei proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit $R = k(v(t))^2$. Dann gilt mit $g =$ Erdbeschleunigung für den zurückgelegten Weg

$$s(t) = \frac{m}{k} \ln\left(\cosh\left(\sqrt{\frac{kg}{m}} \cdot t\right)\right)$$

(i) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $v(t) = \dot{s}(t)$ sowie die Beschleunigung $a(t) = \dot{v}(t)$.

(ii) Betrachten Sie nun die Geschwindigkeit und die Beschleunigung für festes t als Funktion der Reibungskonstanten k. Berechnen Sie die Grenzwerte der Geschwindigkeit und der Beschleunigung für $k \to 0$ also für den freien Fall ohne Reibung.

Aufgabe 3:

a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Taylor eine Näherung für $y = \arcsin(0.1)$ mit einem absoluten Fehler, der nicht größer als 10^{-3} **ii)** 10^{-5} ist.

b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom sechsten Grades $T_6(x;0)$ zu

$$f(x) = a + bx^2 + cx^4 + \cos(x^2)$$

mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und geben Sie eine obere Schranke für den Abbruchfehler $|f(x) - T_6(x;0)|$ auf dem Intervall $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ an.

Aufgabe 4: Gegeben sei die Funktion $f(x) := \ln(\sqrt{2+x}) - \dfrac{1}{2+x}$.

a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die k-te Ableitung von f für alle $k \in \mathbb{N}$ durch die folgende Formel gegeben ist.

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \left[\frac{(k-1)!}{2(2+x)^k} + \frac{k!}{(2+x)^{k+1}}\right] \qquad k \in \mathbb{N}$$

b) Geben Sie die Taylorreihe von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = -1$ an. Konvergiert die Reihe für $x = 2$?

c) Bestimmen Sie ein (ohne Beweis: möglichst kleines) $n \in \mathbb{N}$, so dass für das Taylorpolynom n-ten Grades $T_n(x;-1)$ von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = -1$

$$|R_n(x\,;\,-1)| := |f(x) - T_n(x\,;\,-1)| \leq 10^{-5} \qquad \forall\, x \in [-1.1; -0.8]$$

gilt.

Abgabetermine: 21.-25.1.2008 (zu Beginn der jeweiligen Übung)

Das Team der Analysis I Veranstaltung wünscht Ihnen ein gutes neues Jahr!