Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2007/08**
Prof. Dr. Michael Hinze
Dr. Hanna Peywand Kiani

Analysis I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4

Aufgabe 1:

a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) := x^3 + 2x - xe^{x^2}$$

genau drei Nullstellen hat. Berechnen Sie Näherungen n_k für die Nullstellen x_k, $k = 1, 2, 3$ mit gesicherten absoluten Fehlern von höchstens 0.05. Können Sie auch die relativen Fehler abschätzen?

b) Ein Student der TUHH fährt am Montag um 9 Uhr vom Parkplatz der TUHH an der Schwarzenbergstr. 95 los und kommt um 14 Uhr auf dem Parkplatz der RWTH Aachen am Templergraben 55 an. Nach einem erfolgreichen Tag an der RWTH und einem lustigen Abend in Aachen macht er sich am nächsten Morgen um 9 auf den Rückweg nach Hamburg. Er startet auf dem Parkplatz der RWTH Aachen am Templergraben 55 und benutzt genau die gleichen Strassen wie auf dem Hinweg nur in umgekehrter Richtung, und erreicht um 14 Uhr den Parkplatz der TUHH an der Schwarzenbergstr. 95. Während der Fahrt nach Hamburg fragt sich der Student, ob es eine Stelle auf seinem Weg gibt, die er am Tag zuvor zur gleichen Uhrzeit passiert hat. Beantworten Sie die Frage des Studenten. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2:

a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} e^x & x \le 0 \\ 3x^3 + 2x^2 + ax + b & x > 0\,. \end{cases}$$

Dabei seien a und b reelle Parameter.

(i) Für welche Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ ist f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig?

(ii) Für welche Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ ist f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar?

b) Gegeben sei die Funktion $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} (\omega - 1)x^2 + (2 - \omega)x & x \in [0, 1]\,, \\ A\sin(\omega x) & x \in (1, 2]\,, \end{cases}$$

wobei $A \in \mathbb{R}$ und $\omega \in [0,2]$ gelte. Bestimmen Sie die Konstanten A und ω so, dass f im Intervall (0,2) differenzierbar ist.

c) Wie oft sind die folgenden Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar?

$$\begin{array}{ll} h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} & h(x) = |x^3|, \\ k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} & k(x) = (|x^2 - 4|)^4 \,. \end{array}$$

Aufgabe 3:

a) Berechnen Sie für die folgenden Funktionen jeweils die erste Ableitung.

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} & f(x) = \dfrac{x^n}{e^x}, \quad n \in \mathbb{N} \text{ beliebig aber fest}, \\ g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} & g(x) = \sqrt[x]{x}. \end{array}$$

b) [Klausur 2005 Struckmeier/Kiani] Gegeben sei die Funktion $f(x) = (x+1)\,e^{-3x}$. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die k-te Ableitung von f für alle $k \in \mathbb{N}$ durch die Formel

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k\, 3^{k-1}(3x + 3 - k)\, e^{-3x} \qquad k \in \mathbb{N}$$

gegeben ist.

Aufgabe 4:

Gegeben sei die Funktion $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \mapsto \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(x)$.

a) Leiten Sie die Ableitung der Umkehrfunktion $f^{-1}(y) = \arcsin(y)$ von f mit Hilfe der Regel zur Ableitung von Umkehrfunktionen her.

b) Ist die Funktion $g(x) := \arcsin(x) + \arcsin(\sqrt{1-x^2})$ für alle $x \in [-1,1]$ stetig differenzierbar?

c) Berechnen Sie, die Ableitung von $g(x) := \arcsin(x) + \arcsin(\sqrt{1-x^2})$ für $0 < x < 1$.

Bestimmen Sie den Wert von $g(0.1234567)$ ohne einen Taschenrechner zu verwenden.

Abgabetermine: 7.-11.1.2008 (zu Beginn der jeweiligen Übung)

Das Team der Analysis I Veranstaltung wünscht Ihnen ein frohes Fest und einen guten Rutsch!