Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2007/08**
Prof. Dr. Michael Hinze
Dr. Hanna Peywand Kiani

Analysis I
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 1

Aufgabe 1: Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion

a) (i)

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

(ii) (Aufgabe 1a der Vordiplomsklausur WiSe 02/03)

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{2}{k^3 - k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n(n-1)} \qquad n \geq 2\,,$$

(iii)

$$(1-x)^n \leq 1 - nx + \frac{1}{2}n(n-1)x^2 \qquad \forall x \in (0,1) \ \text{ und } \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

b) Was ist falsch an dem folgenden ,,Induktionsbeweis" dafür, dass alle Studierenden das gleiche Studienfach haben?

Zu beweisen ist die Aussage:

A(n) : In jeder Gruppe von n Studierenden studieren alle das gleiche Fach.

Induktionsanfang : $n = 1$. Die Aussage ist erfüllt, denn in einer Gruppe, die aus einer Person besteht, studieren alle Personen das gleiche.

Induktionsvoraussetzung: Die Aussage sei für alle $n \leq N$ mit einem festen, beliebigen $N \in \mathbb{N}$ wahr.

Induktionsschluß: Wir beweisen die Aussage für $n = N+1$. Dazu betrachten wir eine Gruppe von $N+1$ Personen, entfernen eine Person P1 aus der Gruppe. Dann besteht der Rest der Gruppe aus N Studierenden und diese studieren nach Voraussetzung alle das gleiche Fach. Nun nehmen wir P1 wieder dazu und lassen eine andere Person P2 fort. Dann besteht die Restgruppe wieder aus N Personen und diese studieren nach Voraussetzung alle das gleiche Fach. Also haben alle $N+1$ Personen das gleiche Studienfach.

Aufgabe 2:

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzwerte. Alle auftretenden Folgen seien für $n \in \mathbb{N}$ definiert.

$$
\begin{aligned}
a_n =& n^3\left(\sqrt{n^6+5}-\sqrt{n^6-3}\right), \\
b_1 =& 1, \quad b_{n+1} = \frac{1}{3}\sqrt{6b_n - 1}, \\
c_n =& \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{9n}, \\
d_n =& \left[\frac{1}{n^2+2}\left(\frac{n^3-3n^2+3}{n} - \frac{n^2}{2}\right)\right]^3, \\
r_n =& ne^{-n} \qquad \text{Hinweis: l'Hospital ist noch unbekannt!!}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3: [Klausur 2006, Struckmeier, Kiani, leicht modifiziert]
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(t) = t^2 - 5t + 4.$$

Das Newton Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle der Funktion f mit dem Startwert $t_0 = 5$, erzeugt die Folge

$$t_0 = 5, \quad t_{n+1} = \frac{t_n^2 - 4}{2t_n - 5}; \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

a) Zeigen Sie, dass die Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nach unten durch 4 beschränkt ist. (D.h. $t_n \geq 4$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$).
b) Beweisen Sie die Konvergenz der Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 4:

Es sei $r \in \mathbb{R}, r > 0$ fest vorgegeben und

$$a_n = \frac{(\cos(n\pi) - 1) \cdot r^n}{r^{2n} + 2} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Untersuchen Sie die Folge auf Konvergenz. Geben Sie alle Häufungspunkte der Folge an.

Abgabetermine: 12.11-16.11.2007 (zu Beginn der jeweiligen Übung)