

## Stetigkeit vs Gleichmäßige Stetigkeit.

**Beispiel:** Betrachte die Funktion  $f(x) = 1/x$  auf dem Intervall  $D = (0, 1]$ .

- $f$  ist in jedem Punkt  $p \in (0, 1]$  stetig.

**Denn:** Sei  $p \in (0, 1]$  und  $\varepsilon > 0$  gegeben. Setze  $\delta = \min\left(\frac{p}{2}, \frac{p^2 \varepsilon}{2}\right)$ .

Dann gilt für alle  $x \in D$  mit  $|x - p| < \delta$  (und somit  $x \geq p/2$ ),

$$|f(x) - f(p)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{p} \right| = \left| \frac{x - p}{xp} \right| \leq \frac{2|x - p|}{p^2} < \frac{2\delta}{p^2} \leq \varepsilon.$$

- $f$  ist nicht gleichmäßig stetig auf  $D$ .

**Denn:** man kann (zu gegebenem  $\varepsilon$ )  $\delta$  **nicht** unabhängig von  $p$  wählen.

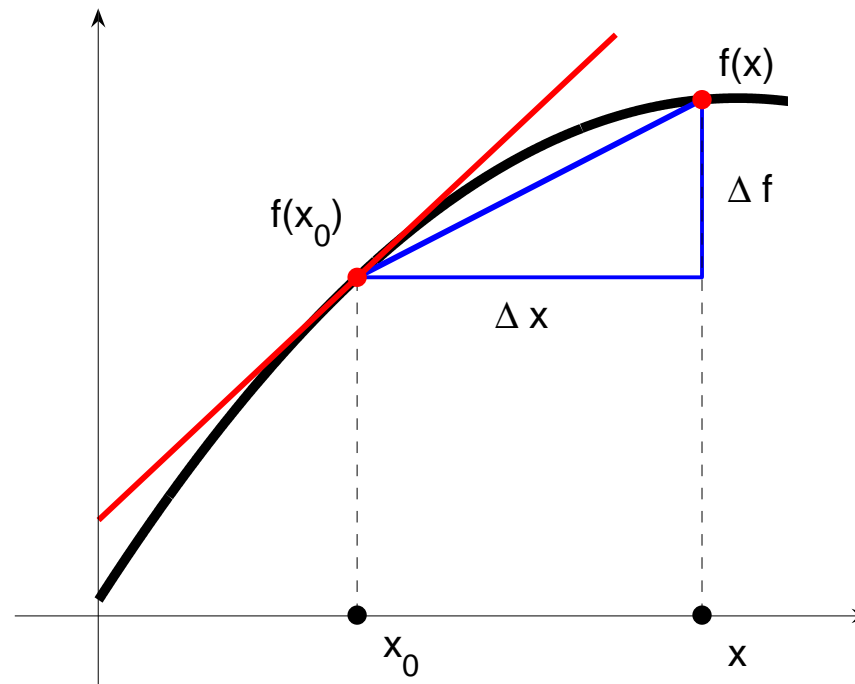
Wäre  $f$  gleichmäßig stetig auf  $D = (0, 1]$ , so gäbe es zu  $\varepsilon = 1$  ein  $\delta > 0$  mit

$$|f(x) - f(y)| < 1 \quad \text{für alle } x, y \in (0, 1] \text{ mit } |x - y| < \delta.$$

Es gibt aber ein  $n \in \mathbb{N}$  mit

$$|1/n - 1/(2n)| = 1/(2n) < \delta \quad \text{und} \quad |f(1/n) - f(1/(2n))| = n \geq 1. \quad \blacksquare$$

## 5.2 Differentialrechnung einer Variablen



**Differenzenquotient und Differentialquotient.**

Der **Differenzenquotient**

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad \text{für } x \neq x_0,$$

gibt die **Sekantensteigung** an. Betrachten nun den Grenzübergang  $x \rightarrow x_0$ .

**Definition:** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^m$  eine Funktion und  $x_0 \in D \cap D'$  ein Punkt.

- Für  $x \in D$ ,  $x \neq x_0$ , nennt man den Ausdruck

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Differenzenquotient bzw. Sekantensteigung von  $f$  bezüglich  $x$ .

- Die Funktion  $f$  heißt **differenzierbar** in  $x_0$ , falls der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. In diesem Fall nennt man den Grenzwert **Ableitung** oder **Differentialquotient** der Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$  und schreibt

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

□

**Definition:** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^m$  eine Funktion und  $x_0 \in D \cap D'$  ein Punkt.

- Dann heißen die einseitigen Grenzwerte

$$f'(x_0^+) := \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0^-) := \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

rechtsseitige bzw. linksseitige Ableitung von  $f$  bei  $x_0$ .

□

**Bemerkung:** Falls  $f$  differenzierbar in  $x_0$ , so stimmen die rechtsseitige und linksseitige Ableitung von  $f$  bei  $x_0$  überein.

□

# Eine Interpretation der Ableitung einer Funktion.

Die zeitliche Bewegung eines Massenpunktes sei beschrieben durch eine Funktion

$$c : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad c = c(t), \quad I \subset \mathbb{R},$$

wobei  $t$  die Zeit und  $c(t)$  der Ort des Massenpunktes. Dann ist die Ableitung

$$\dot{c}(t_0) := \frac{dc}{dt}(t_0) := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{c(t) - c(t_0)}{t - t_0}$$

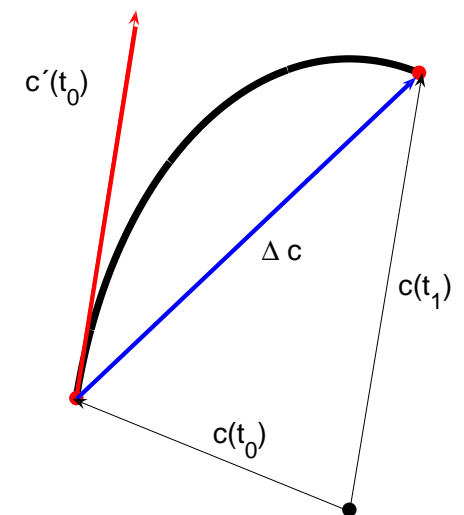
die **Geschwindigkeit**, mit der sich der Massenpunkt bewegt.

**Erklärung:** In  $\Delta t = t - t_0$  legt der Massenpunkt die Strecke  $\Delta c = c(t) - c(t_0)$  zurück; die *mittlere Geschwindigkeit* beträgt

$$\frac{\Delta c}{\Delta t} = \frac{c(t) - c(t_0)}{t - t_0}.$$

Für  $t \rightarrow t_0$  erhält man die *momentane Geschwindigkeit*,

$$\dot{c}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{c(t) - c(t_0)}{t - t_0}.$$



## Beispiel: Ableitung von Monomen.

Betrachte die **Monomfunktion**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , gegeben durch  $f(x) = x^n$ , für  $n \in \mathbb{N}$ .

Dann gilt

$$x^n - x_0^n = (x - x_0) \sum_{j=0}^{n-1} x^{n-1-j} x_0^j, \quad \text{für } x, x_0 \in \mathbb{R},$$

und somit

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{j=0}^{n-1} x^{n-1-j} x_0^j = n x_0^{n-1}$$

**Fazit:** Die Funktion  $f(x) = x^n$  ist auf ganz  $\mathbb{R}$  differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = n x^{n-1}, \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

für die (erste) Ableitung von  $f$ . □

**Bemerkung:** Für eine konstante Funktion  $f(x) \equiv c$  gilt  $f'(x) \equiv 0$ . □

## Linearität der Ableitung.

Sind die beiden Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  differenzierbar, so sind auch

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{und} \quad (\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x) \quad \text{für } \lambda \in \mathbb{R},$$

differenzierbare Funktionen, und es gilt

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) \quad \text{und} \quad (\lambda f)'(x) = \lambda \cdot f'(x).$$

## Ableitung von Polynomen.

Sei  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ein **Polynom**, d.h.  $p$  hat die Form

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad \text{mit Koeffizienten } a_k \in \mathbb{R} \text{ für } 0 \leq k \leq n.$$

Dann ist die (erste) Ableitung von  $p$  gegeben durch

$$\frac{d}{dx}(p(x)) = \frac{d}{dx} \left( \sum_{k=0}^n a_k x^k \right) = \sum_{k=0}^n a_k \frac{d}{dx} x^k = \sum_{k=1}^n a_k k x^{k-1}.$$

## Ableitung elementarer Funktionen.

Funktion	Ableitung	Parameter
$x^\alpha$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R}, x > 0$
$e^x$	$e^x$	$x \in \mathbb{R}$
$\log(x)$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$\tan x$	$1/\cos^2(x)$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$



## Ableitung von vektorwertigen Funktionen.

Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $D \subset \mathbb{R}$ , eine **vektorwertige** Funktion, d.h.  $f$  hat die Form

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))^T \in \mathbb{R}^m, \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Dann wird die Ableitung von  $f$  *komponentenweise* berechnet, d.h. es gilt

$$f'(x) = (f'_1(x), \dots, f'_m(x))^T, \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

### Beispiele:

$$f(x) = (x, e^x, \sin x)^T \implies f'(x) = (1, e^x, \cos x)^T$$

$$f(x) = (\cos x, \sin x)^T \implies f'(x) = (-\sin x, \cos x)^T$$



## Aus Differenzierbarkeit folgt Stetigkeit.

**Satz:** Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}$  in  $x_0 \in D^0$  differenzierbar, so ist  $f$  in  $x_0$  stetig.

**Beweis:** Sei  $f$  in  $x_0$  differenzierbar. Dann folgt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0) - (x - x_0) \cdot f'(x_0)) = 0$$

unmittelbar aus der Voraussetzung

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Wegen  $\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)f'(x_0) = 0$  folgt schließlich

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

d.h. die Funktion  $f$  ist in  $x_0$  stetig. ■

**VORSICHT!** Die Umkehrung dieser Aussage gilt im Allgemeinen nicht!

**Beispiel:** Die Funktion  $f(x) = |x|$  ist stetig, aber nicht differenzierbar in Null. □

## Wichtige Differentiationsregeln.

**Satz:** Seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}$ , in  $x_0 \in D^0$  differenzierbare Funktionen. Dann gelten die folgenden Differentiationsregeln.

(a) Für  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ist  $\alpha f + \beta g$  in  $x_0$  differenzierbar, und es gilt

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

(b) Die Funktion  $f \cdot g$  ist in  $x_0$  differenzierbar, und es gilt die **Produktregel**

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

(c) Ist  $g(x_0) \neq 0$ , so ist die Funktion  $f(x)/g(x)$  in  $x_0$  differenzierbar, und es gilt die **Quotientenregel**

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

**Beweis:** Die Behauptung in Teil (a) folgt unmittelbar aus der Identität

$$\frac{(\alpha f(x) + \beta g(x)) - (\alpha f(x_0) + \beta g(x_0))}{x - x_0} = \alpha \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \beta \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Genauso folgt Teil (b) aus der Identität

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x) + f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Zu Teil (c): Es gilt

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = -\frac{1}{g(x) \cdot g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}, \quad \text{für } g(x_0), g(x) \neq 0,$$

und somit  $(\frac{1}{g})'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$  für  $x_0 \neq 0$ .

Die Behauptung folgt schließlich wie folgt aus der Produktregel, Teil (b).

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - f(x_0)\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$



## Weitere Wichtige Differentiationsregeln.

### Satz:

(a) Seien  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D, E \subset \mathbb{R}$  und  $x_0 \in D^0 \cap (f^{-1}(E))^0$ .

Falls  $f$  differenzierbar in  $x_0$  und  $g$  differenzierbar in  $y_0 = f(x_0)$ , so ist auch die Komposition  $g \circ f$  in  $x_0$  differenzierbar, und es gilt die **Kettenregel**

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

(b) Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  streng monoton wachsend und in  $x_0 \in [a, b]$  differenzierbar mit  $f'(x_0) \neq 0$ , so ist auch die Umkehrfunktion  $f^{-1} : [f(a), f(b)] \rightarrow \mathbb{R}$  in  $y_0 = f(x_0)$  differenzierbar, und es gilt

$$((f^{-1})' \circ f)(x_0) = (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

**Beweis:** Teil (a): Nach Voraussetzung gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \eta_1(x)(x - x_0), & \lim_{x \rightarrow x_0} \eta_1(x) &= f'(x_0), \\ g(y) &= g(y_0) + \eta_2(y)(y - y_0), & \lim_{y \rightarrow y_0} \eta_2(y) &= g'(y_0), \end{aligned}$$

wobei  $y = f(x)$  und  $y_0 = f(x_0)$ . Daraus folgt

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x_0) + \eta_2(f(x)) \cdot \eta_1(x)(x - x_0)$$

und somit

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} = \eta_2(f(x)) \cdot \eta_1(x) \longrightarrow g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \quad \text{für } x \rightarrow x_0.$$

Teil (b): Nach Voraussetzung gilt

$$f(x) = f(x_0) + \eta(x)(x - x_0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \eta(x) = f'(x_0) \neq 0,$$

somit  $y = y_0 + \eta(f^{-1}(y))(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0))$  für  $x = f^{-1}(y)$ , und daher

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\eta(f^{-1}(y))} \longrightarrow \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \quad \text{für } y \rightarrow y_0. \quad \blacksquare$$

## Verallgemeinerte Produktregel.

**Satz:** Ist  $(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine **Bilinearform**, und sind  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $D \subset \mathbb{R}$ , in  $x_0 \in D^0$  differenzierbar, so ist auch die Funktion  $(f, g)$  in  $x_0$  differenzierbar, und es gilt die **verallgemeinerte Produktregel**

$$\left. \frac{d}{dx} (f(x), g(x)) \right|_{x=x_0} = (f'(x_0), g(x_0)) + (f(x_0), g'(x_0)).$$

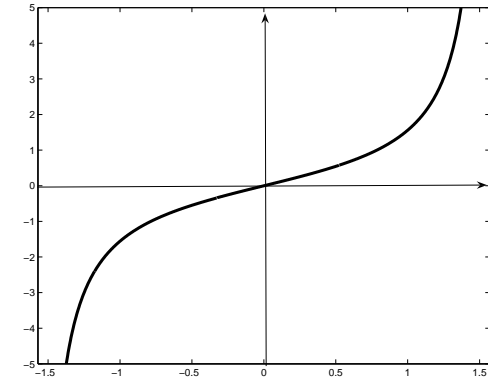
**Beweis:** Analog zum Beweis der Produktregel:

$$\begin{aligned} & \frac{(f(x), g(x)) - (f(x_0), g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, g(x) \right) + \left( f(x_0), \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) \\ &\longrightarrow (f'(x_0), g(x_0)) + (f(x_0), g'(x_0)), \quad \text{für } x \rightarrow x_0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## Beispiel: Anwendung der Quotientenregel.

Betrachte die **Tangensfunktion**

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \text{für } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$



Aus den Ableitungen der trigonometrischen Funktionen

$$\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x) \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$$

erhält man die Ableitung der Tangensfunktion mit der Quotientenregel:

$$\frac{d}{dx} \tan(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right) = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot \sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)},$$

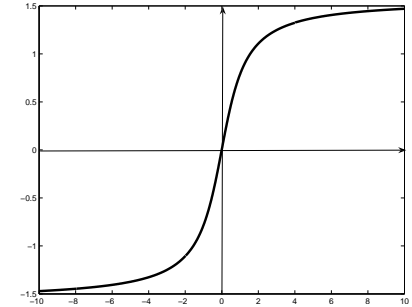
für  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . ■



# Beispiel: Ableitung der Umkehrfunktion.

**Beispiel 1:** Betrachte die Umkehrfunktion der Tangensfunktion,

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

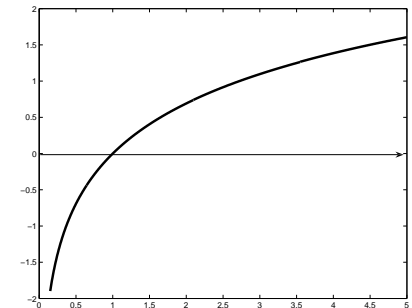


Für die Ableitung von  $x = \arctan(y)$ , d.h.  $y = \tan(x)$ , erhält man

$$\frac{d}{dy} \arctan(y) = \frac{1}{\frac{d}{dx} \tan(x)} = \frac{1}{1/\cos^2(x)} = \cos^2(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(x)} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

**Beispiel 2:** Betrachte den **Logarithmus**, die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion  $\exp(x)$ ,

$$\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}.$$



Für die Ableitung von  $x = \log(y)$ , d.h.  $y = \exp(x)$ , erhält man

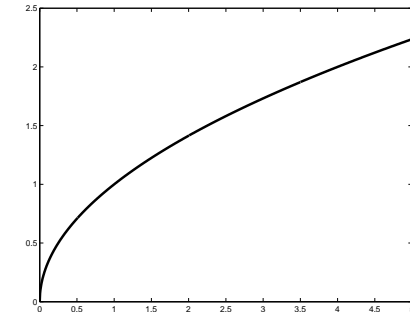
$$\frac{d}{dy} \log(y) = \frac{1}{\frac{d}{dx} \exp(x)} = \frac{1}{\exp(x)} = \frac{1}{y}, \quad \text{für } y \in (0, \infty). \quad \blacksquare$$

## Weiteres Beispiel: Ableitung der Umkehrfunktion.

Betrachte **Wurzelfunktion**  $\sqrt[n]{\cdot} : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ,

$$x \mapsto \sqrt[n]{x} \quad \text{für } x \in (0, \infty) \text{ und } n \geq 2,$$

als Umkehrfunktion der Monomfunktion  $f(x) = x^n$ .



$$f(x) = \sqrt{x}$$

Für die Ableitung von  $x = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}$ , d.h.  $y = x^n$ , erhält man

$$\frac{d}{dy} \sqrt[n]{y} = \frac{1}{\frac{d}{dx} x^n} = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{ny^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1}{n}-1}.$$



## Zwei Beispiele zur Anwendung der Kettenregel.

**Beispiel 1:** Betrachte für  $f(x) = \exp(x)$  und  $g(y) = \cos(y)$  die Komposition

$$(g \circ f)(x) = \cos(\exp(x)) : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1].$$

Die Ableitung von  $g \circ f$  berechnet man mit der Kettenregel wie folgt.

$$\frac{d}{dx} \cos(\exp(x)) = -\sin(\exp(x)) \cdot \exp(x)$$

**Beispiel 2:** Betrachte die Exponentialfunktion  $a^x = \exp(x \cdot \log(a))$  für  $a > 0$ .

Die Ableitung der Funktionen  $a^x$  und  $x^x$  berechnet man mit der Kettenregel:

$$\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} (\exp(x \log(a))) = \exp(x \log(a)) \cdot \log(a) = \log(a) \cdot a^x$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} x^x &= \frac{d}{dx} (\exp(x \log(x))) = \exp(x \log(x)) \left( 1 \cdot \log(x) + x \cdot \frac{1}{x} \right) \\ &= x^x (1 + \log(x)), \quad \text{für } x > 0. \end{aligned}$$



## Ableitungen höherer Ordnung.

- Ist eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  in jedem Punkt  $x_0 \in [a, b]$  differenzierbar, so ist die Ableitung von  $f$  ebenso eine Funktion,  $f' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .
- Ist  $f'$  überall differenzierbar, so erhält man die **zweite Ableitung**  $f''$  von  $f$ .
- Ist  $f''$  überall differenzierbar, so erhält man die **dritte Ableitung**  $f'''$  usw.
- Ist  $f$   $n$ -mal differenzierbar auf  $[a, b]$  und ist die  $n$ -te Ableitung  $f^{(n)}$  auf  $[a, b]$  stetig, so heißt  $f$   **$n$ -mal stetig differenzierbar**,  **$C^n$ -Funktion**.
- Ist  $f$   $n$ -mal differenzierbar auf  $[a, b]$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ , so heißt  $f$  **beliebig oft differenzierbar** (unendlich oft differenzierbar),  **$C^\infty$ -Funktion**.

### Notation:

$$f \in C^0([a, b]) \quad :\iff \quad f \text{ stetig auf } [a, b]$$

$$f \in C^n([a, b]) \quad :\iff \quad f \text{ } n\text{-mal stetig differenzierbar auf } [a, b]$$

$$f \in C^\infty([a, b]) \quad :\iff \quad f \text{ beliebig oft differenzierbar auf } [a, b]$$