1.2 Mengen

Definition: *Eine Menge ist eine Kollektion von paarweise verschiedenen Objekten. Die einzelnen Objekte werden Elemente der Menge genannt.*

Beispiele für Mengen.

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ Menge der natürlichen Zahlen;
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ Menge der nicht-negativen ganzen Zahlen;
- Studierende der TUHH;
- Hörer der Analysis I im WS 2006/2007;
- Menge der Primzahlen.

Notationen: Sei M eine Menge.

$$a \in M \iff a \text{ ist ein Element der Menge } M$$

$$a \notin M \iff \neg(a \in M)$$

Definition von Mengen.

- Aufzählung der Elemente: $M := \{1, 2, 3, 4\}$
- Charakterisierende Eigenschaft der Menge, $M := \{x \in \Omega \,|\, A(x)\}$

Bedeutung der verwendeten Symbole.

$:=$ “wird definiert durch”

$A(x)$ Aussageform, definiert für Elemente x aus dem Grundbereich Ω

Teilmengen von Mengen.

$$M \subset N \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall x : (x \in M \Longrightarrow x \in N)$$

Gleichheit von Mengen.

$$M = N \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall x : (x \in M \Longleftrightarrow x \in N)$$

Die leere Menge. Menge, die kein Element enthält. Bezeichnung: $\emptyset$

Ordnungseigenschaften.

- $M \subset M$;
- $(M \subset N) \wedge (N \subset M) \quad \Longrightarrow \quad M = N$;
- $(M \subset N) \wedge (N \subset P) \quad \Longrightarrow \quad M \subset P$.

Verknüpfung von Mengen.

$$
\begin{array}{lcll}
M \cup N & := & \{x \,|\, x \in M \vee x \in N\} & \text{(Vereinigung)} \\
M \cap N & := & \{x \,|\, x \in M \wedge x \in N\} & \text{(Durchschnitt)} \\
M \setminus N & := & \{x \,|\, x \in M \wedge x \notin N\} & \text{(Differenz)} \\
M \times N & := & \{(a, b) \,|\, a \in M \wedge b \in N\} & \text{(Cartesisches Produkt)} \\
\mathcal{P}(M) & := & \{X \,|\, X \subset M\} & \text{(Potenzmenge)}
\end{array}
$$

Bemerkungen und weitere Bezeichnungen.

- Gilt $M \cap N = \emptyset$, so nennt man M und N disjunkt.

- Verknüpfung von endlich vielen Mengen.

$$
\begin{aligned}
\bigcup_{k=1}^{n} A_k &= A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \\
&:= \{a \,|\, \exists i \in \{1, \ldots, n\} : a \in A_i\} \\
\bigcap_{k=1}^{n} A_k &= A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \\
&:= \{a \,|\, \forall i \in \{1, \ldots, n\} : a \in A_i\} \\
\prod_{k=1}^{n} A_k &= A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \\
&:= \{(a_1, \ldots, a_n) \,|\, \forall i \in \{1, \ldots, n\} : a_i \in A_i\}
\end{aligned}
$$

Weitere Bemerkungen und Bezeichnungen.

- Für geordnete Paare bzw. n-Tupel gilt:

$$(a_1, a_2) = (b_1, b_2) \iff a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2$$
$$(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \iff \forall i \in \{1, \ldots, n\} : x_i = y_i$$

- Wichtige Cartesische Produkte:
  - die Euklidische Ebene

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$$

  - der dreidimensionale Euklidische Raum

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \,|\, x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

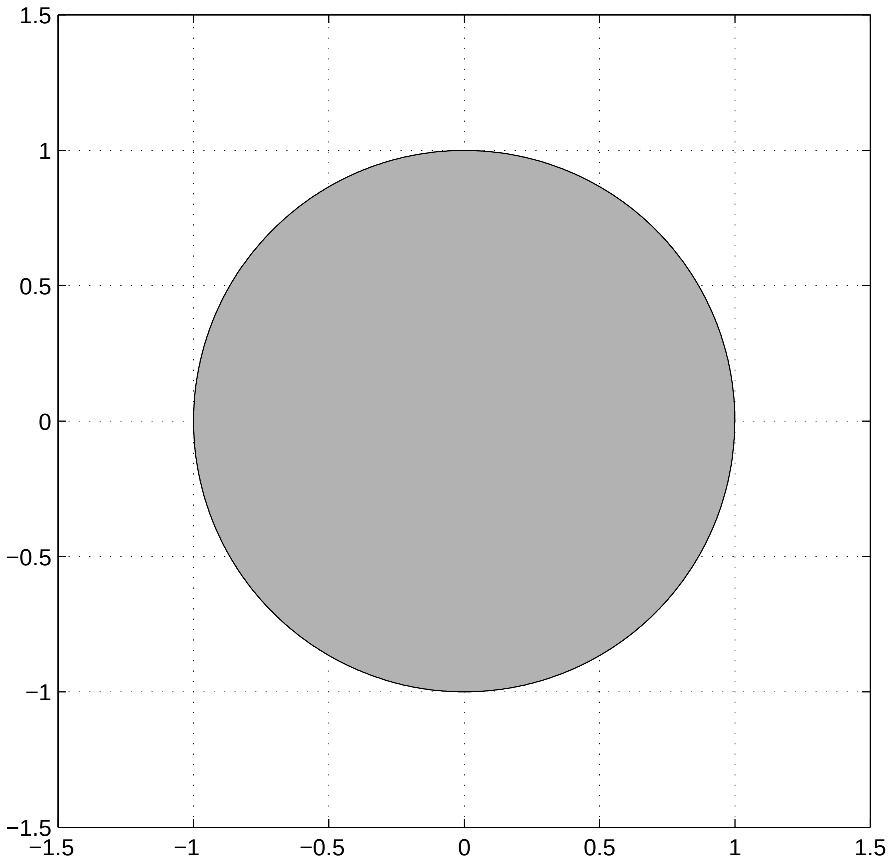
  - der n-dimensionale Euklidische Raum

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n\text{-fach}} = \{(x_1, \ldots, x_n) \,|\, x_i \in \mathbb{R}\}$$

Der Einheitskreis.

- Kreisscheibe mit Radius 1 (Einheitskreis)

$$A := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \right\}$$



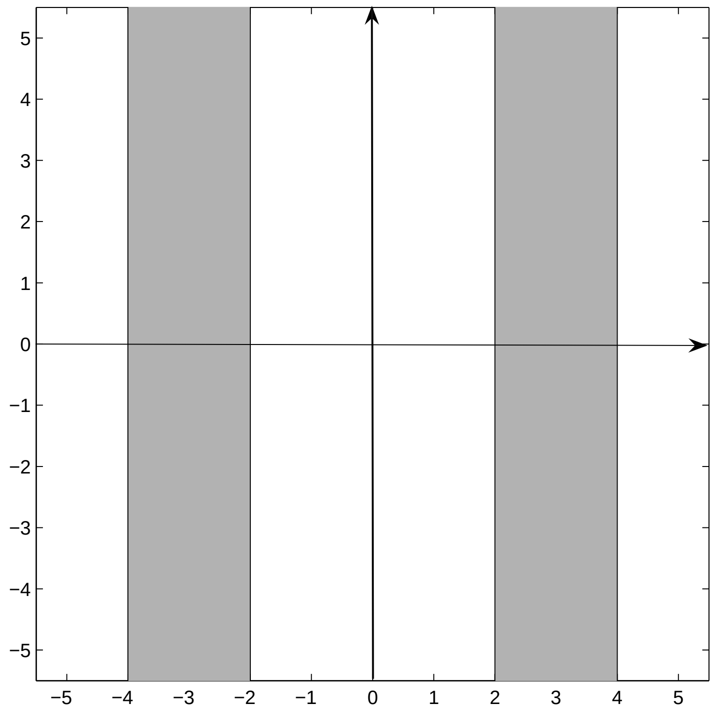
Zwei Streifen. $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 5 \le x^2 + 1 \le 17\}$

Beachte:

$$5 \le x^2 + 1 \le 17 \quad \Longleftrightarrow \quad 4 \le x^2 \le 16 \quad \Longleftrightarrow \quad -4 \le x \le -2 \vee 2 \le x \le 4$$

und somit gilt

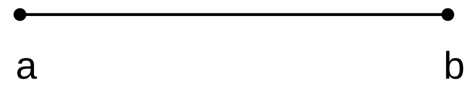
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -4 \le x \le -2 \vee 2 \le x \le 4\}.$$



Intervalle in $\mathbb{R}$.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

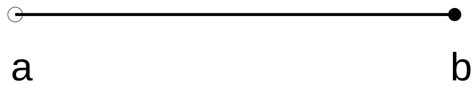
$[a, b] := \{x \mid a \le x \le b\}$ abgeschlossenes Intervall



$(a, b) := \{x \mid a < x < b\}$ offenes Intervall

$[a, b) := \{x \mid a \le x < b\}$ halboffenes Intervall

$(a, b] := \{x \mid a < x \le b\}$ halboffenes Intervall



1.3 Funktionen

Definition: *Seien* M *und* N *Mengen. Unter einer* Funktion *(oder* Abbildung*) von* M *in* N *verstehen wir eine Vorschrift, die jedem Element* $x \in M$ *genau ein Element* $y \in N$ *zuordnet.*

Notationen und Bezeichnungen.

- $f : M \to N$, $y = f(x)$ bzw. $x \mapsto f(x)$ für alle $x \in M$. Somit gilt:

$$f : M \to N \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall x \in M : \exists_1 y \in N : y = f(x).$$

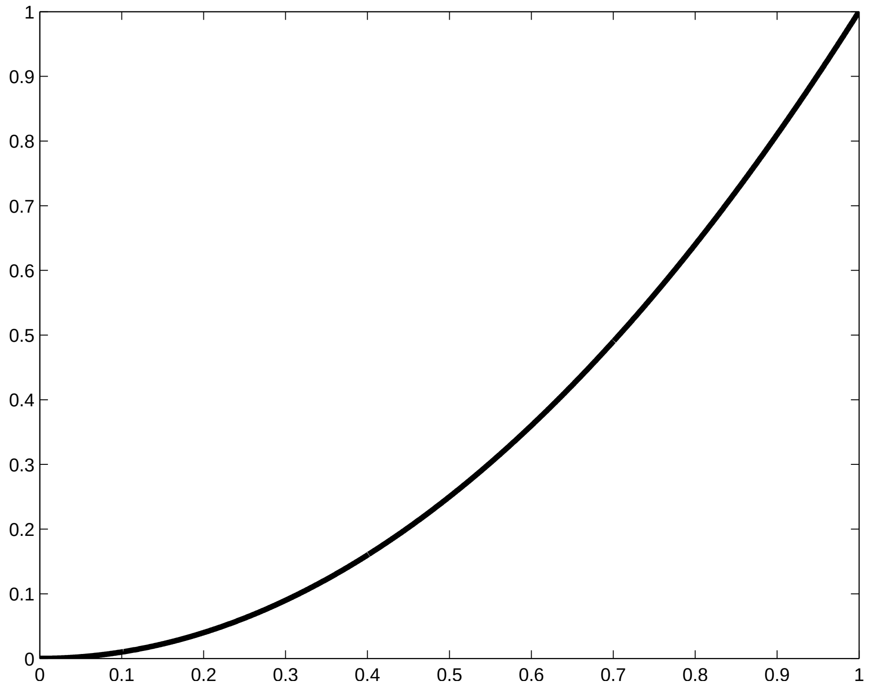
- M heißt Definitionsbereich (oder Urbildbereich) von f;
- N heißt Zielmenge (oder Bildbereich) von f;
- Die Menge

$$\mathrm{graph}(f) = \{(x, f(x)) | x \in M\} \subset M \times N$$

heißt Graph der Funktion f.

Beispiel.

- Funktion $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$, definiert durch $f(x) = x^2$
- $M = [0, 1]$ Definitionsbereich;
- $N = [0, 1]$ Zielmenge.



Graph von $f(x) = x^2$.

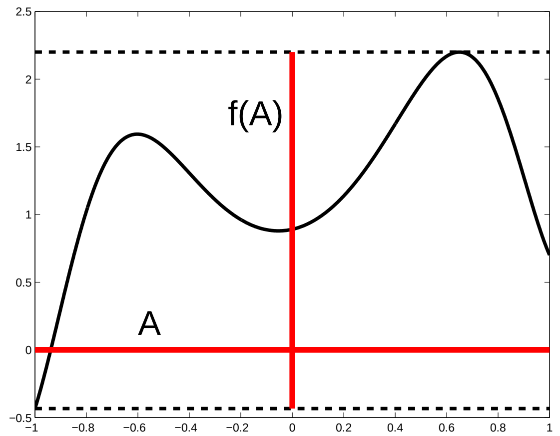
Weitere Notationen und Bezeichnungen.

Sei $f : M \to N$ eine Funktion.

- Zu $A \subset M$ heißt die Menge

$$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\} \subset N$$

das **Bild** von A unter der Funktion f.



- Zu $B \subset N$ heißt die Menge

$$f^{-1}(B) = \{a \in M \mid f(a) \in B\} \subset M$$

das **Urbild** von A unter der Funktion f.