

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4

Aufgabe 13:

Man untersuche die angegebenen Folgen auf Konvergenz

$$\text{a) } \mathbf{x}^n = \left(\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right)^T, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\text{b) } \mathbf{x}^n = \left(\frac{2^n n^2}{3^n}, \frac{n^2}{n^2 + 1}, \frac{(2n-1)^3}{(4n-1)^2(1-5n)} \right)^T, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\text{c) } \mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_n \sin y_n \\ x_n \cos y_n \\ z_n \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: Eine geeignete Norm erleichtert das Leben.

Aufgabe 14:

Man schreibe die folgenden Reihen in Summenschreibweise und untersuche sie auf Konvergenz:

$$\text{a) } \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \frac{4}{11} + \dots,$$

$$\text{b) } \left(\frac{1}{5}\right)^1 + \left(\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{9}\right)^3 + \left(\frac{4}{11}\right)^4 + \dots,$$

$$\text{c) } \frac{10}{1!} + \frac{10^2}{3!} + \frac{10^3}{5!} + \frac{10^4}{7!} + \dots$$

$$\text{d) } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \dots,$$

$$\text{e) } 1 + \frac{3}{5} + \frac{4}{10} + \frac{5}{17} + \frac{6}{26} + \dots$$

Aufgabe 15:

- a) Man zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$$

alterniert und dass für $a_n := \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Warum ist das Leibniz-Kriterium nicht anwendbar?

- b) Warum konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \frac{n}{n+2} \right) ?$$

Ab welchem Index N unterscheiden sich die Partialsummen s_N vom Grenzwert der Reihe um weniger als 10^{-2} ?

Aufgabe 16:

- a) Man ermittle für folgende Mengen
- D_i
- jeweils die Menge
- D'_i
- aller Häufungspunkte und die Menge
- D_i^0
- aller inneren Punkte. Welche der Mengen sind abgeschlossen bzw. offen?

$$D_1 = \left\{ \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N} \right\} \cup [1, 2], \quad D_2 = \left\{ \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N} \right\} \cup [-1, 0],$$

$$D_3 =]1, \infty[, \quad D_4 =]-\infty, 0[\times [0, 1].$$

- b) Man bestimme die Grenzwerte bzw. Häufungspunkte im Bildbereich folgender Funktionen:

$$f_1(x) = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}, \quad D_1 =]0, \infty[\setminus \{1\} \quad \text{für} \quad x \rightarrow 0,$$

$$f_2(x) = \sqrt{-x^2}, \quad D_2 = \{0\}, \quad \text{für} \quad x \rightarrow 0,$$

$$f_3(\xi, \eta) = \frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 + \eta^2}, \quad D_3 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad \text{für} \quad (\xi, \eta) \rightarrow (0, 0),$$

$$\mathbf{f}_4(x) = \left(\frac{1}{x} + \cos x, \frac{1}{x} + \sin x \right)^T, \quad D_4 =]0, \infty[, \quad \text{für} \quad x \rightarrow \infty.$$

Abgabetermin: 8.1. - 11.1.07 (zu Beginn der Übung)