

Kapitel 5: Weiterer Ausbau der Differentialrechnung

5.1 Mittelwertsätze, Extremwerte, Satz von Taylor

1) Satz von Rolle

Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) , so gilt:

$$f(a) = f(b) \quad \Rightarrow \quad \exists x_0 \in (a, b) : f'(x_0) = 0$$

2) Erster Mittelwertsatz

Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) , so gilt:

$$\exists x_0 \in (a, b) : f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

3) Zweiter Mittelwertsatz

Sind die Funktionen f, g stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) und gilt $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$, so gilt:

$$\exists x_0 \in (a, b) : \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

140

Monotone Funktionen

Für eine auf $[a, b]$ differenzierbare Funktion gilt:

$$\forall x : f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \text{ monoton wachsend}$$

$$\forall x : f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ streng monoton wachsend}$$

$$\forall x : f'(x) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \text{ monoton fallend}$$

$$\forall x : f'(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ streng monoton fallend}$$

Beispiel: Die Ableitung der Funktion $f(x) = x - \ln(x + 1)$, $-1 < x < \infty$, lautet

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x + 1} = \frac{x}{x + 1}$$

Damit ist f auf $(-1, 0)$ monoton fallend, auf $(0, \infty)$ monoton wachsend. Insbesondere gilt für alle $x \neq 0$

$$f(x) > f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln(1 + x) < x \quad (\forall x \in (-1, \infty), x \neq 0)$$

141

Lokale Extremwerte

Definition: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subset V$, V normierter Vektorraum), $x_0 \in D$.

1) $f(x)$ hat in x_0 ein **globales Maximum**, falls gilt:

$$\forall x \in D : f(x) \leq f(x_0)$$

2) $f(x)$ hat in x_0 ein **strenges globales Maximum**, falls gilt:

$$\forall x \in D \setminus \{x_0\} : f(x) < f(x_0)$$

3) $f(x)$ hat in x_0 ein **lokales Maximum**, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit:

$$\forall x \in D : \|x - x_0\| < \varepsilon \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$$

4) $f(x)$ hat in x_0 ein **strenges lokales Maximum**, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit:

$$\forall x \in D : 0 < \|x - x_0\| < \varepsilon \Rightarrow f(x) < f(x_0)$$

Analoge Definitionen gelten für minimale Funktionswerte (Extremwerte).

142

Satz: (Kriterium für lokale Extrema I)

Besitzt $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0 \in [a, b]$ ein lokales Extremum und ist $f(x)$ in x_0 differenzierbar, so gilt:

$$a < x_0 < b \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

$$x_0 = a \Rightarrow f'(x_0) \begin{cases} \leq 0 & \text{für ein Maximum} \\ \geq 0 & \text{für ein Minimum} \end{cases}$$

$$x_0 = b \Rightarrow f'(x_0) \begin{cases} \geq 0 & \text{für ein Maximum} \\ \leq 0 & \text{für ein Minimum} \end{cases}$$

Bemerkung: Die Punkte x_0 mit $f'(x_0) = 0$ heißen **stationäre Punkte**.

Die Bedingung $f'(x_0) = 0$ ist lediglich eine **notwendige Bedingung** für ein Extremum. Randpunkte sowie Punkte, an denen $f(x)$ nicht differenzierbar ist, werden mit der notwendigen Bedingung nicht erfasst.

143

Beispiel:

Betrachte die Funktion $f(x) = x^2\sqrt{1-x^2}$ auf dem Intervall $[-1, 1]$. Es gilt

$$f'(x) = \frac{2x - 3x^3}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$$

Stationäre Punkte: $2x - 3x^3 = 0 \Rightarrow x \in \{-\sqrt{2/3}, 0, \sqrt{2/3}\}$

$$f'(x) = \begin{cases} > 0 & : -1 < x < -\sqrt{2/3} \\ < 0 & : -\sqrt{2/3} < x < 0 \\ > 0 & : 0 < x < \sqrt{2/3} \\ < 0 & : \sqrt{2/3} < x < 1 \end{cases}$$

Globale Minima bei $x = \pm 1, 0$ mit Funktionswert $f(x) = 0$

Globale Maxima bei $x = \pm\sqrt{2/3}$ mit Funktionswert $f(x) = 2/(3\sqrt{3})$

144

Definition: (Landau-Symbole) Für eine Funktion $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $0 \in D \cap D'$, und $k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ sagt man:

$$\begin{aligned} \varphi(h) = o(h^k) & \quad :\Leftrightarrow \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h)}{h^k} = 0 \\ \varphi(h) = O(h^k) & \quad :\Leftrightarrow \quad \exists C, \varepsilon > 0 : \forall 0 < |h| < \varepsilon : \\ & \quad \left(h \in D \Rightarrow \left| \frac{\varphi(h)}{h^k} \right| \leq C \right) \end{aligned}$$

Bedeutung:

$\varphi(h) = o(h^k)$: $\varphi(h)$ konvergiert für $h \rightarrow 0$ schneller gegen Null als h^k

$\varphi(h) = O(h^k)$: $\varphi(h)$ konvergiert für $h \rightarrow 0$ wenigstens so schnell gegen Null wie h^k

Ableitung: Ist f differenzierbar in x_0 , so gilt:

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0)$$

145

Taylor–Entwicklung, Taylor–Polynom, Satz von Taylor:

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^n –Funktion und $x_0 \in (a, b)$.

Frage: Wie kann man $f(x)$ in der Nähe von x_0 approximieren?

Erste Antwort: f ist differenzierbar, also gilt

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{Polynom vom Grad 1}} + o(x - x_0)$$

Zweite Antwort:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2}}_{\text{Polynom vom Grad 2}} + o((x - x_0)^2)$$

Denn es gilt ebenfalls:

$$f'(x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Integration über $[x_0, x]$ liefert die zweite Antwort.

146

Satz von Taylor: (Taylor–Entwicklung, Taylor–Polynom)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^n –Funktion und $x_0 \in (a, b)$.

Dann gilt:

$$f(x) = T_n(x; x_0) + o((x - x_0)^n)$$

Dabei lautet das (eindeutig bestimmte) **Taylor–Polynom**

$$T_n(x; x_0) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Den Punkt x_0 nennt man den **Entwicklungspunkt**.

Ist f eine C^{n+1} –Funktion, so gilt die **Restgliedformel (Lagrange)**:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x; x_0)$$
$$R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad (|\xi - x_0| < |x - x_0|)$$

147

Bemerkung: Andere Darstellungen für das Restglied:

1) Integraldarstellung des Restglieds:

$$R_n(x; x_0) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

2) Restgliedformel von Cauchy:

$$R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x - x_0)^{n+1} (1 - \theta)^n$$

mit $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $\theta \in (0, 1)$

3) Restgliedformel von Schlömilch:

$$R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{p n!} (x - x_0)^{n+1} (1 - \theta)^{n+1-p}$$

mit $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $\theta \in (0, 1)$, $p \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$