

Beispiel: Wir untersuchen die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad (z \in \mathbb{C})$$

Anwendung des Quotientenkriteriums ergibt

$$\left| \frac{\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{z^k}{k!}} \right| = \left| \frac{z^{k+1} k!}{z^k (k+1)!} \right| = \frac{|z|}{k+1} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

Damit konvergiert die Reihe (absolut).

Setze für alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$

$$\exp(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

105

Umordnungssatz für Reihen

Sei $\sigma : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine beliebige Bijektion (Permutation) auf \mathbb{N}_0

$$\text{Vergleiche } \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{mit} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k} \quad (\sigma_k = \sigma(k))$$

Beispiel (alternierende harmonische Reihe)

Satz:

1) Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent, so ist auch jede umgeordnete

Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k}$ absolut konvergent und es gilt $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k}$

2) Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k}$ für jede Permutation $\sigma : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ konvergent,

so ist die Ausgangsreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

106

Produkt von Reihen

Ausmultiplizieren von Reihen möglich?

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l \right) \stackrel{?}{=} \sum_{k=l=0}^{\infty} a_k b_l$$

Rechte Seite: jedes Indexpaar $(k, l) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ tritt genau einmal auf

Satz: Die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{l=0}^{\infty} b_l$ seien absolut konvergent.

Dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k} b_{\mu_k}$ für jede Numerierung der Indexpaare

$(\sigma, \mu) : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0^2$ (Bijektion) absolut konvergent und es gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k} b_{\mu_k} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l \right)$$

107

Beweis: Für $m \in \mathbb{N}$ gilt für hinreichend großes N

$$\sum_{k=0}^m |a_{\sigma_k} b_{\mu_k}| \leq \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^N |a_k| |b_l| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} |b_l| \right)$$

Also ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma_k} b_{\mu_k}$ absolut konvergent, ihr Grenzwert ist daher nach dem Umordnungssatz unabhängig von der Permutation (σ, μ) .

Zur Berechnung des Grenzwertes wählt man eine spezielle Reihenfolge

	0	1	2	3	...	(σ_k)
0	0	3	8	15	...	
1	1	2	7	14	...	
2	4	5	6	13	...	
3	9	10	11	12	...	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		
(μ_k)						

108

Spezielle Reihenfolge:

	0	1	2	3	...	(σ_k)
0	0	3	8	15	...	
1	1	2	7	14	...	
2	4	5	6	13	...	
3	9	10	11	12	...	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		
(μ_k)						

Für $m = (n + 1)^2 - 1$ ergibt sich dann

$$\sum_{k=0}^m a_{\sigma_k} b_{\mu_k} = (a_0 + a_1 + \dots + a_n)(b_0 + b_1 + \dots + b_n)$$

und daher

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m a_{\sigma_k} b_{\mu_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k \right) \left(\sum_{l=0}^n b_l \right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l \right)$$

109

Weiterer Spezialfall: Numerierung entlang der Diagonalen

	0	1	2	3	...	(σ_k)
0	0	2	5	9
1	1	4	8	13	...	
2	3	7	12	18	...	
3	6	11	17	24	...	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		
(μ_k)						

Man erhält damit das **Cauchy-Produkt der Reihen**:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \dots \end{aligned}$$

110

Anwendung zum Cauchy-Produkt: Für die durch

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad (z \in \mathbb{Z})$$

definierte **Exponentialfunktion** gilt die **Funktionalgleichung**

$$\exp(z + w) = \exp(z) \exp(w)$$

Begründung: Die obige Reihe ist absolut konvergent. Damit folgt

$$\begin{aligned} \exp(z) \exp(w) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{w^l}{l!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z + w)^n = \exp(z + w) \end{aligned}$$

111

Kapitel 4: Stetigkeit und Differenzierbarkeit

4.1 Stetigkeit, Grenzwerte von Funktionen

Zunächst: Beispiel auf Folie

112

Kapitel 4: Stetigkeit und Differenzierbarkeit

4.1 Stetigkeit, Grenzwerte von Funktionen

V und W normierte Vektorräume, $f : D \rightarrow W$, $D \subset V$ eine Funktion.

Definition:

- 1) Ein Punkt $x_0 \in V$ heißt **Häufungspunkt von** D , falls eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existiert mit

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad x_n \in D, \quad x_n \neq x_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

Wichtige Notationen:

D' = Menge aller Häufungspunkte von D

$\overline{D} = D \cup D'$ = abgeschlossene Hülle (topologische Abschluss) von D

- 2) Die Menge D heißt **abgeschlossen**, falls $D' \subset D$, also $\overline{D} = D$ gilt

113

Definition: (Fortsetzung)

- 3) Zu $x_0 \in V$ und $\varepsilon > 0$ bezeichne

$$K_\varepsilon(x_0) := \{x \in V \mid \|x - x_0\| < \varepsilon\}$$

die (offene) Kugel um x_0 mit Radius ε

- 4) Die Menge D heißt **beschränkt**, falls es ein $\varepsilon > 0$ und ein $x_0 \in V$ gibt mit $D \subset K_\varepsilon(x_0)$
- 5) Ein Punkt $x_0 \in D$ heißt **innerer Punkt von** D , falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $K_\varepsilon(x_0) \subset D$.

Notationen:

$D^0 (= \text{int}(D))$ = Menge aller inneren Punkte von D
= **(offene) Kern von D = Innere von D**

- 6) Die Menge D heißt **offen**, falls $D^0 = D$ gilt

114

Beispiele:

1) $D = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ ist offen mit $D' = [0, 1]$, $D = [0, \infty) \subset \mathbb{R}$ ist abgeschlossen

2) Sei $D = (-\infty, 0) \cup \{1\} \cup (2, \infty) \Rightarrow$

$$D' = (-\infty, 0] \cup [2, \infty)$$

$$\bar{D} = (-\infty, 0] \cup \{1\} \cup [2, \infty)$$

$$D^0 = (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$$

3) $D = K_\varepsilon(x_0) \subset V$ ist offen

$D' = \{x \mid \|x - x_0\| \leq \varepsilon\} =: \bar{K}_\varepsilon(x_0)$ ist die abgeschlossene Kugel

4) Innere Punkte $x_0 \in D^0$ sind immer Häufungspunkte von D , da

$$x_0 + \frac{\varepsilon}{n+1} \frac{z}{\|z\|} \rightarrow x_0, \quad n \rightarrow \infty, \quad z \in V, \quad z \neq 0$$

115

Definition: Gegeben sei $f : D \rightarrow W$, $D \subset V$ und ein $x_0 \in D'$

1) $f(x)$ konvergiert für $x \rightarrow x_0$ gegen den Grenzwert y_0 , falls für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \in D$, $x_n \neq x_0$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y_0$$

Notation: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$

2) Im Fall $D = \mathbb{R}$ lassen sich **einseitige** Grenzwerte definieren:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = y_0 \Leftrightarrow \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in D, x_n < x_0 :$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = y_0 \Leftrightarrow \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in D, x_n > x_0 :$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y_0$$

116

Beispiel 1: Betrachte die Funktion definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \wedge x = 1 \\ 1 & : \text{sonst} \end{cases}$$

Für $x \rightarrow 0$ existiert der Grenzwert der Funktion nicht! Weiter gilt

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \neq f(1)$$

Notation: Sprungfunktion

Beispiel 2: Für die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(1/x)$ existiert weder der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ noch $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

Beispiel 3: Für die Funktion $f(x) = 1/x$ existieren die beiden einseitigen **uneigentlichen Grenzwerte**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

117

Bemerkung: Grenzwertsätze für Folgen gelten auch bei Grenzwerten von Funktionen, d.h.

1) Für den Grenzwert einer Summe gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

2) Für den Grenzwert eines Produkts mit λ gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda f(x)) = \lambda \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

3) Ist der Wertebereich W gleich \mathbb{R} oder \mathbb{C} , so gilt für Produkte:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right)$$

Entsprechend gilt für vektorwertige Funktionen in \mathbb{R}^n oder \mathbb{C}^n :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f_1(x), \dots, f_n(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x), \dots, \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right)$$

118

Definition: (Stetige Funktionen) Sei $f : D \rightarrow W, D \subset V$

- 1) Die Funktion $f(x)$ heißt **stetig ergänzbar** in $x_0 \in D'$, falls $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert (und endlich ist).
- 2) Die Funktion $f(x)$ heißt **stetig in** $x_0 \in D \cap D'$, falls $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt.
- 3) Die Funktion $f(x)$ heißt **stetig**, falls $f(x)$ in **allen** Punkten $x_0 \in D \cap D'$ stetig ist.

Satz: (ε - δ -Definition)

Für $x_0 \in D \cap D'$ sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:

- 1) $f(x)$ ist stetig in x_0 , d.h. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- 2) $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in D :$

$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

119

Beweis:

1) \Rightarrow 2): **Annahme:** $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x_\delta \in D :$

$$\|x_\delta - x_0\| < \delta \quad \wedge \quad \|f(x_\delta) - f(x_0)\| \geq \varepsilon$$

Die Wahl $\delta = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) generiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_n \in D$ mit

$$\|x_n - x_0\| < \frac{1}{n} \quad \wedge \quad \|f(x_n) - f(x_0)\| \geq \varepsilon$$

Wegen $\|f(x_n) - f(x_0)\| \geq \varepsilon$ gilt

$$x_n \neq x_0 \Rightarrow x_n \in D \setminus \{x_0\}$$

sowie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

Gleichzeitig konvergiert aber $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ nicht gegen $f(x_0)$ \Rightarrow

Widerspruch dazu, dass $f(x)$ im Punkt x_0 stetig ist.

120

Beweis: (Fortsetzung)

2) \Rightarrow 1): Es gelte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \quad x_n \in D \setminus \{x_0\}$$

Zu $\varepsilon > 0$ wählt man ein $\delta > 0$ mit

$$\forall x \in D : \|x - x_0\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

Sei nun $N = N(\varepsilon)$ mit

$$\forall n \geq N : \|x_n - x_0\| < \delta$$

Dann folgt direkt

$$\forall n \geq N : \|f(x_n) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Damit ist die Funktion $f(x)$ stetig im Punkt x_0