

### 1.3 Funktionen

Seien  $M$  und  $N$  Mengen

$$f : M \rightarrow N \Leftrightarrow \forall x \in M : \exists_1 y \in N : y = f(x)$$

nennt man **Funktion** oder Abbildung.

**Beachte:** Zuordnung ist eindeutig.

Bezeichnungen:

$M$  : Definitionsbereich

$N$  : Bildbereich (Zielmenge) von  $f$

Der Graph einer Funktion:

$$\text{graph}(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in M\} \subset M \times N$$

21

Sei  $A \subset M$ : das **Bild** von  $A$  unter der Funktion  $f$  ist gegeben durch

$$f(A) := \{f(a) \mid a \in A\}$$

Für  $B \subset N$  nennt man

$$f^{-1}(B) := \{a \in M \mid f(a) \in B\}$$

das **Urbild** von  $B$  unter der Funktion  $f$ .

Eine Funktion  $f$  ist

**surjektiv**, falls  $f(x) = y$  stets wenigstens eine Lösung hat, d.h.

$$\forall y \in N \exists x \in M : y = f(x)$$

**injektiv**, falls  $f(x) = y$  stets höchstens eine Lösung hat, d.h.

$$\forall x_1, x_2 \in M : (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$$

22

Eine Funktion  $f$  ist

**bijektiv**, falls  $f$  gleichzeitig injektiv und surjektiv ist

Injektive Funktionen besitzen eine **Umkehrfunktion**

$$f^{-1} : f(M) \rightarrow M : f^{-1}(f(x)) = x$$

Ist  $f$  bijektiv so gilt

$$M \xrightarrow{f} N \quad N \xrightarrow{f^{-1}} M$$

**Bemerkung:**

Die Umkehrfunktion einer reellwertigen Funktion einer reellen Variablen erhält man durch Spiegelung an der Diagonalen

23

**Komposition** von Funktionen:

Sei  $f : M \rightarrow N$  und  $g : N \rightarrow P$ . Definiere

$$g \circ f : M \rightarrow P, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Eigenschaften der Komposition:

a) assoziativ

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

b) in der Regel **nicht** kommutativ

$$g \circ f \neq f \circ g$$

c) Sei  $M$  Menge eine Menge, setze

$$S(M) := \{f : M \rightarrow M \mid f \text{ bijektiv}\}$$

nennt man **symmetrische Gruppe** von  $M$

24

## Die **symmetrische Gruppe** von $M$

### Gruppenaxiome

- G1)  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$  (Assoziativgesetz)  
G2)  $f \circ id_M = id_M \circ f = f$  (neutrales Element)  
G3)  $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id_M$  (inverses Element)

Dabei ist  $id_M$  die Identität (als Funktion), d.h.

$$id_M(x) = x$$

und  $f^{-1}$  die Umkehrfunktion von  $f$ .

25

## **Elementare Funktionen:**

### **a) Affin–lineare Funktion**

$$y = f(x) = a_1x + a_0$$

Der Graph ist eine Gerade in der euklidischen Ebene

### **b) Polynome**

$$y = f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

Dabei bezeichnet  $n$  den Grad des Polynoms

### **c) Exponentialfunktion**

$$y = f(x) = a^x \quad (a > 0, a \text{ reell})$$

Für die Exponentialfunktion gilt

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

26

### c) Exponentialfunktion (Fortsetzung)

Speziell: Exponentialfunktion  $y = e^x$ , zum Beispiel definiert durch

$$f'(0) = 1 \Rightarrow e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \approx 2.718281828 \dots$$

(Eulersche Zahl)

### d) Logarithmus

$$y = f(x) = \log_a x, \quad a > 0, a \neq 1$$

Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ( $\Rightarrow$  nur definiert für positive  $x$ )

Für den Logarithmus gilt

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

**Speziell:** natürlicher Logarithmus  $y = \ln x$  (Basis  $e$ ) mit

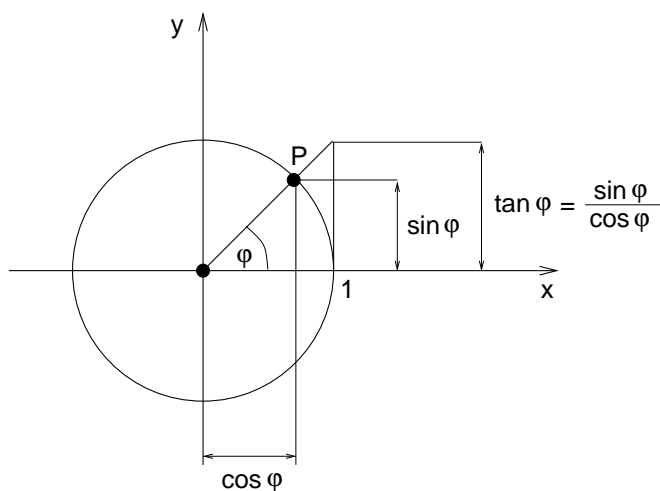
$$\ln 1 = 0 \quad \ln e = 1$$

27

### e) Trigonometrische Funktionen

Bogenmaß:  $0^\circ = \varphi = 0$ ,  $45^\circ = \varphi = \frac{\pi}{4}$ ,  $90^\circ = \varphi = \frac{\pi}{2}$

Kreiszahl  $\pi = 3.141592563 \dots$



**Bild:** Trigonometrische Funktionen am Einheitskreis

28

## Eigenschaften:

Es gelten:

$$(i) \quad \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$$

$$(ii) \quad \sin(-\varphi) = -\sin(\varphi), \quad \cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$$

$$(iii) \quad \cos(\varphi + 2\pi) = \cos(\varphi), \quad \sin(\varphi + 2\pi) = \sin(\varphi)$$

(iv) Wertetafel:

$\varphi$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin \varphi$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos \varphi$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

(v) Additionstheoreme

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

29

## Kapitel 2: Zahlenbereiche

### 2.1 Natürliche Zahlen

Die Menge der natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

wird **abstrakt** durch die **Peano-Axiome** definiert:

$$(A1) \quad 1 \in \mathbb{N}$$

$$(A2) \quad n \in \mathbb{N} \Rightarrow (n + 1) \in \mathbb{N}$$

$$(A3) \quad n \neq m \Rightarrow (n + 1) \neq (m + 1)$$

$$(A4) \quad n \in \mathbb{N} \Rightarrow (n + 1) \neq 1$$

(A5) für eine Teilmenge  $A \subset \mathbb{N}$  gilt :

$$1 \in A \wedge (\forall n : [n \in A \Rightarrow (n + 1) \in A]) \Rightarrow A = \mathbb{N}$$

Die **Nachfolgeabbildung**  $n \rightarrow (n + 1)$  ist eine injektive Abbildung

31

Das **Vollständigkeitsaxiom** (A5) ist Grundlage des

### **Beweisprinzips der vollständigen Induktion**

Zu beweisen sei:

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt: die Aussage  $A(n)$  ist wahr, also

$$\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$$

Dabei ist  $A(n)$  eine Aussageform, die von  $n \in \mathbb{N}$  abhängt.

32

Gelten nun

$$A(1) \quad \textbf{(Induktionsanfang)}$$

und für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$

$$A(n) \Rightarrow A(n + 1) \quad \textbf{(Induktionsschluss)}$$

so ist die Aussage  $A(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  wahr.

#### **Wichtig:**

Induktionsschluss muss für ein beliebiges, festes  $n \in \mathbb{N}$  bewiesen werden

Man nennt daher

$A(n)$  die **Induktionsannahme**

$A(n + 1)$  die **Induktionsbehauptung**

33

**Beispiel:** Anzahl  $t_n$  der Teilmengen einer  $n$ -elementigen Menge

Finde eine Formel für  $t_n$ , die für *kleine*  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

für  $n = 1$   $A_1 = \{a_1\}$   
Teilmengen:  $\emptyset, \{a_1\}$   
es gibt  $t_1 = 2$  Teilmengen

für  $n = 2$   $A_2 = \{a_1, a_2\}$   
Teilmengen:  $\emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_1, a_2\}$   
es gibt  $t_2 = 4$  Teilmengen

Es gilt:  $t_1 = 2 = 2^1$ ,  $t_2 = 4 = 2^2$

**Vermutung:** Allgemein gilt

$$t_n = 2^n$$

d.h. eine  $n$ -elementige Menge besitzt genau  $2^n$  Teilmengen

34

**Satz:** Eine  $n$ -elementige Menge  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  besitzt  $2^n$  Teilmengen

**Beweis:** (durch vollständige Induktion)

$n = 1$ : Wie gezeigt, gilt  $t_1 = 2$

$n \rightarrow n + 1$ : Sei  $n \in \mathbb{N}$  beliebig, aber fest.

Induktionsvoraussetzung: Eine  $n$ -elementige Menge hat  $2^n$  Teilmengen

Zu beweisen ist:  $A = \{a_1, \dots, a_n, a_{n+1}\}$  hat  $2^{n+1}$  Teilmengen.

Setze  $\mathcal{P}(A) = K_1 \cup K_2$  mit

$$T \in K_1 \quad :\Leftrightarrow \quad a_{n+1} \notin T$$

$$T \in K_2 \quad :\Leftrightarrow \quad a_{n+1} \in T$$

Nach Induktionsvoraussetzung besitzt  $K_1$  genau  $2^n$  Elemente, denn die Elemente aus  $K_1$  sind gerade die Teilmengen von  $A' = \{a_1, \dots, a_n\}$ .

35

Jedes Element aus  $K_2$  hat die Form

$$T = \{a_{i_1}, \dots, a_{i_k}, a_{n+1}\}$$

wobei

$$\{a_{i_1}, \dots, a_{i_k}\} \subset K_1$$

Also besitzt die Menge  $K_2$  wieder nach Induktionsvoraussetzung ebenfalls  $2^n$  Elemente.

Nach Konstruktion gilt

$$K_1 \cap K_2 = \emptyset$$

Daraus folgt aber, dass  $\mathcal{P}(A)$  genau  $2^n + 2^n = 2^{n+1}$  Elemente besitzt.

36

**Beispiel:** Wieviele Vertauschungen (Permutationen) des  $n$ -Tupels  $(1, 2, \dots, n)$  gibt es?

Suche wiederum eine Formel für kleine  $n \in \mathbb{N}$ :

$n = 1$ : (1) : 1 Permutation  
 $n = 2$ : (1,2), (2,1) : 2 Permutationen  
 $n = 3$ : (1,2,3), (1,3,2)  
(2,3,1), (2,1,3) : 6 Permutationen  
(3,1,2), (3,2,1)

Es gilt:  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = 2 = 1 \cdot 2$ ,  $p_3 = 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$

**Vermutung:** Allgemein gilt

$$p_n = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = n!$$

d.h. ein  $n$ -Tupel besitzt genau  $n!$  Permutationen.

37



**Satz:** Es gibt  $p_n := n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$  Permutationen des  $n$ -Tupels  $(1, 2, \dots, n)$  (bzw.  $(a_1, \dots, a_n)$ ,  $a_i$  paarweise verschieden)

**Beweis:** (durch vollständige Induktion)

$n = 1$ : Wie gezeigt, gilt  $p_1 = 1$

$n \rightarrow n + 1$ : Sei  $n \in \mathbb{N}$  beliebig, aber fest

Induktionsvoraussetzung: Ein  $n$ -Tupel besitzt  $n!$  Permutationen

Zu beweisen ist: Das  $(n + 1)$ -Tupel besitzt  $(n + 1)!$  Permutationen

Betrachte spezielle Permutation

$$(k, i_1, \dots, i_n)$$

wobei  $(i_1, \dots, i_n)$  Permutation der Menge  $(1, \dots, k - 1, k + 1, \dots, n + 1)$ .

$\Rightarrow n + 1$  paarweise disjunkte Klassen von Permutationen  $\Rightarrow$

$$p_{n+1} = (n + 1) \cdot p_n = (n + 1)!$$

38

**Folgerung:**

Eine  $n$ -elementige Menge  $\{a_1, \dots, a_n\}$  besitzt genau

$$\binom{n}{m} := \frac{n!}{m!(n - m)!}$$

$m$ -elementige Teilmengen. Dies gilt für alle ganzen Zahlen  $0 \leq m \leq n$ , wobei zusätzlich  $0! := 1$  gesetzt wird.

**Beweis:** Vollständige Induktion unter Verwendung des nächsten Satzes

**Bezeichnung:**

Die natürlichen Zahlen  $\binom{n}{m}$  nennt man **Binomialkoeffizienten**.

39

**Satz:**

a) Für  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $0 < m \leq n$ , gilt die Rekursionsformel:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m-1}$$

b) Für reelle (und auch komplexe)  $a, b$  und  $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$  gilt der

**Binomische Lehrsatz:**

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

40

**Definition:**

Allgemeine Summen und Produkte

$$\sum_{k=m}^n b_k := b_m + b_{m+1} + \dots + b_n \quad (\text{falls } m \leq n)$$

$$\sum_{k=m}^n b_k := 0 \quad (\text{falls } m > n, \text{ leere Summe})$$

$$\prod_{k=m}^n b_k := b_m \cdot b_{m+1} \cdot \dots \cdot b_n \quad (\text{falls } m \leq n)$$

$$\prod_{k=m}^n b_k := 1 \quad (\text{falls } m > n, \text{ leeres Produkt})$$

41

**Definition:**

Potenzen

$$a^n := \prod_{k=1}^n a \quad \text{für } n \geq 0$$

$$a^n := 1/(a^{-n}) \quad \text{für } n < 0$$

Dann gelten die Potenzgesetze:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

42

**Satz:**a) Für  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $0 < m \leq n$ , gilt die Rekursionsformel:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m-1}$$

b) Für reelle (und auch komplexe)  $a, b$  und  $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$  gilt der**Binomische Lehrsatz:**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

43

**Beweis** zu a):  $(n, m \in \mathbb{N}, 0 < m \leq n)$

$$\begin{aligned}\binom{n}{m} + \binom{n}{m-1} &= \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!} \\ &= \frac{n!(n-m+1) + n!m}{m!(n+1-m)!} \\ &= \frac{n!(n+1-m+m)}{m!(n+1-m)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{m!(n+1-m)!} \\ &= \binom{n+1}{m}\end{aligned}$$

44

**Beweis** zu b): (vollständige Induktion)

$n = 1$ :

$$(a+b)^1 = a+b = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0$$

$n \rightarrow n+1$ :

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \stackrel{\text{Ind.vor.}}{=} (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\ &\stackrel{j=k+1}{=} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}\end{aligned}$$

45

$$\begin{aligned}
& \stackrel{j=k+1}{=} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[ \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 \\
&= \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

denn

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = \binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1$$

46

Berechnung der Binomialkoeffizienten mit Hilfe des

**Pascalsches Dreieck**

			1			
			1	1		
		1	2	1		
	1	3	3	1		
	1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1	
...	...	...	...	...	...	...

Beispiel: Binomischer Lehrsatz

$$\begin{aligned}
(a+b)^5 &= 1 \cdot a^0 b^5 + 5 \cdot a^1 b^4 + 10 \cdot a^2 b^3 + 10 \cdot a^3 b^2 + 5 \cdot a^4 b^1 + 1 \cdot a^5 b^0 \\
&= a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5
\end{aligned}$$

47