**Aufgabe 1:**

a) Prüfen Sie, ob man den Parameter $a$ bzw. $b$ so wählen kann, dass die Funktion $f$ bzw. $g$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig wird.

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+1} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & : \; x > 0 \\ 1 + a(x-1) & : \; x \leq 0 \end{cases} \qquad g(x) := \begin{cases} \dfrac{(1-\cos(x))^2}{\sin(x) - x} & : \; x < 0 \\ e^{b(x-1)} & : \; x \geq 0 \end{cases}$$

b) Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) \;=\; e^{\cos(2x)} \;.$$

Bestimmen Sie alle Nullstellen und Extrema von $f$ und klassifizieren Sie die Extrema.

Existiert $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ ? Bitte begründen Sie Ihre Antwort!!

**Lösung:**

a) (i)

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+1} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & : \; x > 0 \\ 1 + a(x-1) & : \; x \leq 0 \end{cases}$$

Es gilt einerseits $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2+1} \;=\; 0$

und andererseits $\displaystyle\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \;\leq\; 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\,.$

Es folgt

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{x}{x^2+1}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \;\leq\; \lim_{x\to 0}\left|\frac{x}{x^2+1}\right| \;=\; 0$$

Mit der Wahl $a = 1$ wird die Funktion $f$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

(ii) l'Hospital oder Reihen einsetzen

$$g(x) := \begin{cases} \dfrac{(1-\cos(x))^2}{\sin(x)-x} & : \ x < 0 \\ e^{b(x-1)} & : \ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} g(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{2(1-\cos(x))\sin(x)}{\cos(x)-1} \\ &= \lim_{x\to 0} (-2\sin x) = 0 \end{aligned}$$

Andererseits gilt $g(0) = e^{-b} > 0 \qquad \forall b \in \mathbb{R}$.
Die Funktion $g$ wird also für keine Wahl $b \in \mathbb{R}$ stetig.

b)

$$f(x) = e^{\cos(2x)}$$

Nullstellen: die Exponentialfunktion hat keine Nullstellen. Auf ganz $\mathbb{R}$ gilt $f(x) > 0$.

Extrema : Die Exponentialfunktion wächst streng monoton. $f$ wird genau dann maximal/minimal, wenn der Cosinus–Term Maximal/minimal wird.

Maxima : $\cos(2x) = 1 \iff x = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$.

Minima : $\cos(2x) = -1 \iff x = k\pi + \dfrac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$.

Verhalten für $x \to \pm\infty$: Das Argument der Exponentialfunktion verhält sich periodisch. Damit ist $f$ ebenfalls periodisch. Eine nicht konstante, periodische Funktion $f(x)$ kann keinen Grenzwert für $x \to \pm\infty$ haben.

**Aufgabe 2:**
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(t) = t^2 - 5t + 4.$$

a) Leiten Sie die Rekursionsformel, die das Newton Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle der Funktion $f$ mit dem Startwert $t_0 = 5$ erzeugt, her.

b) Zeigen Sie, dass die Folge

$$t_0 = 5, \quad t_{n+1} = \frac{t_n^2 - 4}{2t_n - 5}; \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

nach unten durch 4 beschränkt ist. (D.h. $t_n \geq 4$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ )

c) Zeigen Sie, dass die Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ aus Teil b) monoton fallend ist.

d) Beweisen Sie die Konvergenz der Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ aus Teil b) und bestimmen Sie den Grenzwert.

**Lösung:**

a) $t_0 = 5\,, \quad t_{n+1} := t_n - \dfrac{f(t_n)}{f'(t_n)} = t_n - \dfrac{t_n^2 - 5t_n + 4}{2t_n - 5} = \dfrac{t_n^2 - 4}{2t_n - 5}\,.$

b) Induktion:

Anfang: $t_0 = 5 > 4\,.$

Voraussetzung : Es gelte $t_n > 4$ für ein beliebiges, festes $n \in \mathbb{N}_0\,.$

Behauptung : Dann gilt auch $t_{n+1} > 4\,.$

Beweis :

$$t_{n+1} > 4 \iff \frac{t_n^2 - 4}{2t_n - 5} > 4 \iff t_n^2 - 4 > 8t_n - 20$$

$$\iff t_n^2 - 8t_n + 16 = (t_n - 4)^2 > 0$$

Die letzte Ungleichung ist für alle $t_n \neq 4$ erfüllt. Es folgt die Behauptung.

c) Monotonie:

$$t_n - t_{n+1} = \frac{t_n^2 - 5t_n + 4}{2t_n - 5} > 0$$

$$\iff t_n^2 - 5t_n + 4 > 0 \qquad \text{(Nenner nach Teil a größer als 3)}$$

$$\left(t_n - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} > 0$$

Nach Teil b) ist $t_n$ größer als 4 und damit $t_n - \frac{5}{2} > \frac{3}{2}$ oder $\left(t_n - \frac{5}{2}\right)^2 > \frac{9}{4}$.
Damit folgt die Monotonie der Newtonfolge.

d) Die Folge aus b) ist monoton fallend und nach unten beschränkt, also konvergent. Für den Grenzwert gilt

$$t \;=\; t - \frac{t^2 - 5t + 4}{2t - 5} \iff t^2 - 5t + 4 = (t-1)(t-4) = 0$$

Als Grenzwert kommen also nur die Zahlen 1 oder 4 in Frage. Da die Folge monoton fällt und nach unten durch 4 beschränkt ist (Teil b), ist $t^* = 4$ der Grenzwert.