Aufgabe 1:

a) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz

$$\sum_{n=2}^{\infty} \binom{n}{2} \frac{1}{(2n)!} \,.$$

b) Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1} \cdot 2^n}{13^{n-1}} \,.$$

c) Beweisen Sie die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi) \sin\left(\frac{n\pi}{n^2+1}\right) \,.$$

und geben Sie eine obere und eine untere Schranke für den Grenzwert der Reihe an.

Lösung zur Aufgabe 1:

a) Zur Untersuchung der Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \binom{n}{2} \frac{1}{(2n)!} \,.$$

kann man das Quotientenkriterium verwenden. Es gilt

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{\binom{n+1}{2}(2n)!}{\binom{n}{2}(2n+2)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} \cdot \frac{2!(n-2)!}{n!} \cdot \frac{(2n)!}{(2n+2)!} \\
&= \frac{(n+1)}{(n-1)} \cdot \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{2(n-1)(2n+1)} \\
&\leq \frac{1}{2(2-1)(4+1)} = \frac{1}{10} < 1 \,.
\end{aligned}$$

Die Reihe ist also konvergent.

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1} \cdot 2^n}{13^{n-1}} = 3 \cdot 13 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot 2^n}{13^n} = 39 \left(-1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6^n}{13^n} \right)$$

$$= 39 \left(\frac{1}{1 - \frac{6}{13}} - 1 \right) = \frac{39 \cdot 6}{7} = \frac{234}{7} \cdot$$

c)

$$s := \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi) \sin\left(\frac{n\pi}{n^2+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{n\pi}{n^2+1}\right)$$

Behauptung: Die Folge $\left(\sin\left(\frac{n\pi}{n^2+1}\right)\right)_{n\in N}$ ist eine streng monoton fallende Nullfolge.

Beweis: $a_n := \frac{n\pi}{n^2+1}$ ist streng monoton fallend, denn $a_n > 0\,, \forall n \in \mathbb{N}$ und

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)\pi(n^2+1)}{((n+1)^2+1)(n\pi)} = \frac{n^3+n^2+n+1}{n^3+2n^2+2n} < 1$$

Es gilt also $a_1 = \frac{\pi}{2} \geq a_n > \lim_{n\to\infty} \frac{n\pi}{n^2+1} = 0$. Die Sinus Funktion ist im Intervall $(0;\pi/2)$ streng monoton steigend. Daher fällt $\left(\sin\left(\frac{n\pi}{n^2+1}\right)\right)_{n\in N}$ streng monoton mit n.

Darüberhinaus gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{n^2+1}\right) = \sin\left(\lim_{n\to\infty} \frac{n\pi}{n^2+1}\right) = \sin(0) = 0\,.$$

Damit sind die Voraussetzungen für die Anwendung des Leibniz–Kriteriums erfüllt. Die Reihe konvergiert und es gilt z. B.

$s_1 = \cos(\pi)\sin(\pi/2) = -1 < s < s_2 = -1 + \cos(2\pi)\sin(2\pi/5) < 0\,.$

Aufgabe 2:
Gegeben sei die Funktion $f(x) = (x+1)\, e^{-3x}$.

a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die k-te Ableitung von f für alle $k \in \mathbb{N}$ durch die Formel

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k\, 3^{k-1}(3x+3-k)\, e^{-3x} \qquad k \in \mathbb{N}$$

gegeben ist.

b) Geben Sie das Taylor-Polynom $T_3(x\,;\,x_0)$ dritten Grades von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an.

c) Zeigen Sie, dass der absolute Fehler $|R_3(x\,;\,0)| := |f(x) - T_3(x\,;\,0)|$ im Intervall $[-0,1\,;\,0,1]$ nach oben durch 0,01 beschränkt ist, d.h.

$$|R_3(x;0)| := |f(x) - T_3(x\,;\,0)| \leq 0.01 \qquad \forall x \in [-0,1\,;\,0,1] \cdot$$

Lösung zur Aufgabe 2: $f(x) = (x+1)\, e^{-3x}$.

a) Behauptung: $f^{(k)}(x) = (-1)^k\, 3^{k-1}(3x+3-k)\, e^{-3x} \qquad k \in \mathbb{N}$

Beweis: (Induktion)

Induktionsanfang : $f'(x) = e^{-3x}(1-3x-3) = (-1)^1\, 3^{1-1}(3x+3-1)\, e^{-3x}$.
Induktionsvoraussetzung: Für ein festes $k \in \mathbb{N}$ gelte

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k\, 3^{k-1}(3x+3-k)\, e^{-3x}$$

Induktionsschritt : Dann gilt

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left((-1)^k\, 3^{k-1}(3x+3-k)\, e^{-3x}\right)' \\ &= (-1)^k\, 3^{k-1}[3 - 3(3x+3-k)]\, e^{-3x} \\ &= (-1)^{k+1}\, 3^k[(3x+3-k)-1]\, e^{-3x} \\ &= (-1)^{k+1}\, 3^k[(3x+3-(k+1)]\, e^{-3x} \end{aligned}$$

Die Behauptung gilt also auch für $k+1$ und damit für alle $k \in \mathbb{N}$.

b) Nach Teil a) gilt $f(0) = 1, \quad f'(0) = -2, \quad f''(0) = 3, \quad f'''(0) = 0$ und damit

$$T_3(x\,;\,0) = 1 - 2x + \frac{3}{2}x^2$$

c) Mit einem Zwischenwert $\alpha \in [-0,1\,;\,0,1]$ gilt

$$
\begin{aligned}
|R_3(x\,;\,0)| &= \left| \frac{f^{(3+1)}(\alpha)}{(3+1)!}\,(x-0)^{3+1} \right| \\
&= \frac{x^4}{4!} |3^3(3\alpha+3-4)e^{-3\alpha}| \\
&\leq \frac{9\cdot 10^{-4}}{8}\,|-1+3\alpha|\cdot e^{-3\alpha} \\
&\leq \frac{9\cdot 10^{-4}}{8}\,|-1,3|\,e^{0.3} \leq \frac{(9+2,7)\cdot 10^{-4}}{8}\,e^{0.5} \\
&\leq \frac{12\cdot 10^{-4}}{8}\,4^{0.5} = 3\cdot 10^{-4} < 10^{-2}
\end{aligned}
$$