Aufgabe 1:

a) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz

$$\sum_{n=2}^{\infty} \binom{n}{2} \frac{1}{(2n)!} \,.$$

b) Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1} \cdot 2^n}{13^{n-1}} \,.$$

c) Beweisen Sie die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi) \sin\left(\frac{n\pi}{n^2+1}\right) \,.$$

und geben Sie eine obere und eine untere Schranke für den Grenzwert der Reihe an.

Aufgabe 2:
Gegeben sei die Funktion $f(x) = (x+1)\, e^{-3x}$.

a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die k-te Ableitung von f für alle $k \in \mathbb{N}$ durch die Formel

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k\, 3^{k-1}(3x+3-k)\, e^{-3x} \qquad k \in \mathbb{N}$$

gegeben ist.

b) Geben Sie das Taylor-Polynom $T_3(x\,;\,x_0)$ dritten Grades von f zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an.

c) Zeigen Sie, dass der absolute Fehler $|R_3(x\,;\,0)| := |f(x) - T_3(x\,;\,0)|$ im Intervall $[-0,1\,;\,0,1]$ nach oben durch 0,01 beschränkt ist, d.h.

$$|R_3(x;0)| := |f(x) - T_3(x\,;\,0)| \leq 0.01 \qquad \forall x \in [-0,1\,;\,0,1] \,.$$