Aufgabe 1:

a) Prüfen Sie, ob man den Parameter a bzw. b so wählen kann, dass die Funktion f bzw. g auf ganz $\mathbb{R}$ stetig wird.

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+1}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & : \; x > 0 \\ 1 + a(x-1) & : \; x \le 0 \end{cases} \qquad g(x) := \begin{cases} \dfrac{(1-\cos(x))^2}{\sin(x) - x} & : \; x < 0 \\ e^{b(x-1)} & : \; x \ge 0 \end{cases}$$

b) Gegeben sei die Funktion

$$f:\; \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) \;=\; e^{\cos(2x)} \;.$$

Bestimmen Sie alle Nullstellen und Extrema von f und klassifizieren Sie die Extrema.

Existiert $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$? Bitte begründen Sie Ihre Antwort!!

Hinweis : Erst Denken, dann Rechnen !!

Aufgabe 2:
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(t) = t^2 - 5t + 4.$$

a) Leiten Sie die Rekursionsformel, die das Newton Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle der Funktion f mit dem Startwert $t_0 = 5$ erzeugt, her.

b) Zeigen Sie, dass die Folge

$$t_0 = 5, \quad t_{n+1} = \frac{t_n^2 - 4}{2t_n - 5}; \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

nach unten durch 4 beschränkt ist. (D.h. $t_n \ge 4$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$)

c) Zeigen Sie, dass die Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ aus Teil b) monoton fallend ist.

d) Beweisen Sie die Konvergenz der Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ aus Teil b) und bestimmen Sie den Grenzwert.