

# Analysis I

## für Studierende der Ingenieurwissenschaften

### Blatt 6

#### Aufgabe 1:

- a) Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion

$$f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad f(x) := (1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

zum Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$ .

- b) Geben Sie das Taylorpolynom dritten Grades  $T_3(x; 0)$  von  $f$  an und zeigen Sie, dass der absolute Abbruchfehler  $|T_3(x; 0) - f(x)|$  auf dem Intervall  $[-0.2, 0.3]$  nach oben durch 0.1 beschränkt ist.

- c) Geben Sie das Taylorpolynom dritten Grades  $T_3(x; 0)$  der Funktion

$$g(x) := \frac{\sin(x)}{\sqrt{1+x}}$$

zum Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$  an.

**Hinweis:** Sie brauchen für den Teil c) der Aufgabe keine neuen Ableitungen zu berechnen!

#### Aufgabe 2:

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \ln(x).$$

- a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom vierten Grades  $T_4(x; 1)$  von  $f$  zum Entwicklungspunkt  $x_0 = 1$ .
- b) Schätzen Sie den absoluten Abbruchfehler  $|T_4(x; 1) - f(x)|$  auf dem Intervall  $[1, 2]$  ab.
- c) Bestimmen Sie  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $|T_n(2; 1) - f(2)| < 0.01$  gilt.
- d) Seien  $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$  gegebene Konstanten und  $\ln(a)$  bekannt. Bestimmen Sie das Taylorpolynom vierten Grades  $T_4(x; 1)$  der Funktion

$$g(x) := \ln(ax^2) + b + c(x-1)^2 + d(x-1)^4,$$

und schätzen Sie den absoluten Abbruchfehler  $|T_4(x; 1) - g(x)|$  auf dem Intervall  $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$  ab.

### Aufgabe 3:

Gegeben sei die Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2 + 2 \cos\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)\pi\right) & x \leq 1 \\ \frac{2}{e^{x-1}} & x > 1 \end{cases}$$

- Bestimmen Sie die Nullstellen von  $f$ .
- Bestimmen und Klassifizieren Sie die Extrema von  $f$ .
- Untersuchen Sie das Verhalten von  $f$  für  $x \rightarrow \pm\infty$ .
- Geben Sie das Bild von  $\mathbb{R}$  unter  $f$  an (Wertebereich).
- Skizzieren Sie den Graphen von  $f$  für  $x \in [-5; 5]$ .

### Aufgabe 4:

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x^2 \sin(x)}$ ,
- $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$ ,
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right)$ ,
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n a^x$ ,  $n \in \mathbb{N}$  fest,  $a > 1$ .

**Abgabetermine:** 6.-9.2.2006 (zu Beginn der jeweiligen Übung)