

Analysis I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4

Aufgabe 1:

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz. [2+3+2+3 Punkte]

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3n + 1}{3n^2 - 5n} & \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{4n^2 - n} \\ \text{c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} & \text{d)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2^n} \end{array}$$

Aufgabe 2: [2+3+3+2 Punkte]

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{4^n} & \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4 \cdot 2^n - 3} \\ \text{c)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{(k+1)!} & \text{d)} \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{n^3}{16} \left(\sqrt{n^6 + 5} - \sqrt{n^6 - 3} \right) \right]^n \end{array}$$

Aufgabe 3: [6+4 Punkte]

a) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+6}{n(n+1)}$ konvergiert.

Sei s der Grenzwert der Reihe und s_k die Partialsumme

$$s_k := \sum_{n=1}^k (-1)^n \cdot \frac{n+6}{n(n+1)}$$

Geben Sie eine natürliche Zahl k an, so dass der Abbruchfehler $|s_k - s|$ kleiner als 0.01 wird.

- b) Begründen Sie, dass die folgende Reihe konvergiert, und geben Sie eine obere und eine untere Schranke für den Grenzwert an

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)(k+2)(k+3)}.$$

Aufgabe 4: [3+7 Punkte]

- a) Prüfen Sie, ob man den Parameter a bzw. b bzw. c aus \mathbb{R} so wählen kann, dass die Funktion f bzw. g bzw. h auf ganz \mathbb{R} stetig wird.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-2x} & \text{für } x \neq \frac{1}{2} \\ a & \text{für } x_0 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad g(x) := \begin{cases} e^{x-1} & : x < 1 \\ bx + 4 & : x \geq 1 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x^3 \cos\left(\frac{1}{x^3}\right) & \text{für } x > 0 \\ x^2 + c & \text{für } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{in } x_0 = 0$$

- b) Berechnen Sie ohne Verwendung der Regel von l'Hospital die folgenden Grenzwerte.

- (i) $\lim_{x \rightarrow 3^+} [\ln(x^2 - x - 6) - \ln(x - 3)],$
(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1+x)^n}{x}, \quad n \in \mathbb{N} \text{ fest},$
(iii) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 27},$
(iv) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\sqrt{x^2 + 1} + x \right).$

Abgabetermine: 9.1-12.1.2006 (zu Beginn der jeweiligen Übung)